

Введение в линейную алгебру, теорию поля и ряды Фурье

**АДЗЕРИХО С. Я.,
ПОЛОНСКИЙ И. М., СТОДОЛЬНИК Н. А.**

Издательство „Вышэйшая школа“

С. Я. Адзерихо, И. М. Полонский, Н. А. Стодольник

Введение в линейную алгебру, теорию поля и ряды Фурье

Под общей редакцией
канд. техн. наук С. Я. Адзерихо



Издательство „Вышэйшая школа“. Минск 1968

Рекомендовано Ученым советом Белорусского технологического
института им. С. М. Кирова

Предисловие

Книга предназначена для студентов технологических специальностей высших технических учебных заведений и соответствует программам для этих специальностей по соответствующим разделам. В ней наряду с теоретическим материалом приведено много подробно разобранных примеров и задач, что несомненно поможет студентам лучше усвоить теоретическую часть курса.

Уровень строгости при изложении материала соответствует обычно принятому во втузовских курсах.

Учебное пособие составлено сотрудниками кафедры высшей математики Белорусского технологического института им. С. М. Кирова: канд. техн. наук, доц. *С. Я. Адзерихо*, старшими преподавателями *И. М. Полонским* и *Н. А. Стодольник*. *С. Я. Адзерихо* написана глава III и совместно с *Н. А. Стодольник* глава II, *И. М. Полонским* — глава I и IV.

Пользуясь случаем, выносим искреннюю благодарность *Е. Е. Дорскому* и *А. М. Колобову*, внимательно просмотревшим рукопись и давшим ряд ценных указаний.

Авторы

Линейные преобразования и матрицы

Линейные преобразования находят широкое применение при изучении свойств геометрических фигур. Вполне понятно, что, изучая свойства какой-либо фигуры, можно совершать только такие преобразования, которые не меняют интересующие нас ее свойства. Линейные преобразования вполне определяются своими таблицами коэффициентов. Эти таблицы называют матрицами линейных преобразований. Матрицы служат очень удобным аппаратом для изучения линейных преобразований, а значит, и свойств геометрических фигур. Особенно удобно пользоваться матричным аппаратом для решения систем линейных уравнений и упрощения уравнений кривых и поверхностей второго порядка. Этому вопросу и посвящена глава I.

§ 1. Линейные преобразования на плоскости

Если каждой точке M плоскости P поставлена в соответствие определенная точка M' той же плоскости, то говорят, что задано *преобразование плоскости*.

Введем на плоскости P прямоугольную систему координат. Тогда данное преобразование плоскости может быть представлено аналитически в виде

$$\left. \begin{aligned} x' &= \varphi_1(x, y), \\ y' &= \varphi_2(x, y), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где x, y — координаты точки M ; x', y' — координаты точки M' ; а $\varphi_1(x, y)$ и $\varphi_2(x, y)$ — однозначные функции переменных x, y .

Если система (1) при любых x', y' имеет единственное решение

$$\left. \begin{aligned} x &= \bar{\varphi}_1(x', y'), \\ y &= \bar{\varphi}_2(x', y'), \end{aligned} \right\} \quad (1')$$

где $\bar{\varphi}_1(x', y')$ и $\bar{\varphi}_2(x', y')$ — однозначные функции переменных x' и y' , то соотношения (1') тоже определяют преобразование плоскости.

Преобразование (1') называется *обратным* по отношению к преобразованию (1). Если преобразование (1) переводит

какую-либо точку $M(x, y)$ в $M'(x', y')$, то преобразование $(1')$ возвращает точку $M'(x', y')$ в прежнее положение $M(x, y)$.

Из определения обратного преобразования следует, что не всякое преобразование имеет обратное, так как не всякая система вида (1) будет иметь единственное решение вида $(1')$.

Частным случаем преобразования плоскости является преобразование, которое все точки плоскости оставляет на месте. Такое преобразование называется *тождественным*.

О п р е д е л е н и е. Преобразование (1) плоскости называется *линейным*, если $\varphi_1(x, y)$ и $\varphi_2(x, y)$ — линейные функции относительно переменных x, y .

Таким образом, линейное преобразование плоскости аналитически представляется в виде

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + b_1, \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + b_2, \end{cases}$$

где $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$ — некоторые числовые коэффициенты.

Полагая $b_1 = b_2 = 0$, мы получим линейное преобразование плоскости

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y, \\ y' = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases} \quad (2)$$

которое, как легко видеть, точку $O(0, 0)$ оставляет на месте. Примером такого преобразования может служить поворот плоскости на угол α вокруг начала координат, когда координаты точки преобразуются по формулам

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha, \\ y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha. \end{cases}$$

В дальнейшем мы будем рассматривать только линейные преобразования вида (2). Если определитель системы (2)

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

не равен нулю, то эта система имеет единственное решение относительно x, y (при любых x', y')

$$\begin{cases} x = b_{11}x' + b_{12}y', \\ y = b_{21}x' + b_{22}y'. \end{cases} \quad (2')$$

Преобразование $(2')$ также будет линейным. По отношению к (2) преобразование $(2')$ является обратным.

Определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

называется *определителем линейного преобразования* (2). Очевидно, что определитель обратного преобразования отличен от нуля, так как система (2') должна иметь единственное решение (2) при любых x, y .

Пример. Дано линейное преобразование

$$\begin{cases} x' = 3x + 2y, \\ y' = 7x + 5y. \end{cases}$$

Найти обратное преобразование.

Решение.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} x' & 2 \\ y' & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}} = 5x' - 2y'; \quad y' = \frac{\begin{vmatrix} 3 & x' \\ 7 & y' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}} = -7x' + 3y'.$$

§ 2. Линейные преобразования в пространстве

Если каждой точке M пространства поставлена в соответствие определенная точка M' того же пространства, то говорят, что задано *преобразование пространства*.

Выберем в пространстве прямоугольную систему координат. Тогда данное преобразование пространства может быть представлено аналитически в виде

$$\begin{cases} x' = \varphi_1(x, y, z), \\ y' = \varphi_2(x, y, z), \\ z' = \varphi_3(x, y, z), \end{cases} \quad (3)$$

где $\varphi_1(x, y, z)$, $\varphi_2(x, y, z)$, $\varphi_3(x, y, z)$ — однозначные функции.

Если система (3) имеет единственное решение (при любых x', y', z')

$$\begin{cases} x = \bar{\varphi}_1(x', y', z'), \\ y = \bar{\varphi}_2(x', y', z'), \\ z = \bar{\varphi}_3(x', y', z'), \end{cases} \quad (3')$$

то соотношения (3') тоже определяют преобразование пространства. Преобразование (3') называется *обратным* по отношению к преобразованию (3). Если преобразование (3) переводит точку $M(x, y, z)$ в точку $M'(x', y', z')$, то преобразование (3') возвращает точку $M'(x', y', z')$ в прежнее положение $M(x, y, z)$.

Так как не всякая система (3) имеет единственное решение при любых x', y', z' , то и не всякое преобразование (3) имеет обратное.

О п р е д е л е н и е. Преобразование (3) пространства называется линейным, если $\varphi_1(x, y, z)$, $\varphi_2(x, y, z)$, $\varphi_3(x, y, z)$ — линейные функции относительно x, y, z .

Таким образом, линейное преобразование пространства определяется формулами

$$\left. \begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + b_1, \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + b_2, \\ z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + b_3, \end{aligned} \right\}$$

где a_{ik} , b_i ($i, k=1, 2, 3$) — некоторые числовые коэффициенты. Легко видеть, что линейное преобразование пространства плоскость преобразует в плоскость.

Полагая $b_1 = b_2 = b_3 = 0$, получим линейное преобразование пространства

$$\left. \begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \\ z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

которое оставляет на месте точку $O(0, 0, 0)$. В дальнейшем будем рассматривать только такие линейные преобразования.

Определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

называется *определителем линейного преобразования* (4).

Если $\Delta \neq 0$, то система (4) имеет единственное решение

$$\left. \begin{aligned} x &= b_{11}x' + b_{12}y' + b_{13}z', \\ y &= b_{21}x' + b_{22}y' + b_{23}z', \\ z &= b_{31}x' + b_{32}y' + b_{33}z'. \end{aligned} \right\} \quad (4')$$

Соотношения (4') определяют линейное преобразование, обратное по отношению к преобразованию (4).

Пример. Дано линейное преобразование

$$\left. \begin{aligned} x' &= x + 2y + z, \\ y' &= 2x + y + z, \\ z' &= x + 3y + z. \end{aligned} \right\}$$

Найти обратное преобразование.

Р е ш е н и е. Найдём переменные x, y, z по формулам

$$x = -\frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}.$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} x' & 2 & 1 \\ y' & 1 & 1 \\ z' & 3 & 1 \end{vmatrix} = -2x' + y' + z';$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & x' & 1 \\ 2 & y' & 1 \\ 1 & z' & 1 \end{vmatrix} = -x' + z'; \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & x' \\ 2 & 1 & y' \\ 1 & 3 & z' \end{vmatrix} = 5x' - y' - 3z',$$

Тогда

$$\left. \begin{aligned} x &= -2x' + y' + z', \\ y &= -x' + z', \\ z &= 5x' - y' - 3z'. \end{aligned} \right\}$$

З а м е ч а н и е. Если определитель линейного преобразования (плоскости или пространства) отличен от нуля, то преобразование называется *невырожденным*; если же он равен нулю, то преобразование называется *вырожденным*. Вырожденное преобразование не имеет обратного.

§ 3. Квадратные матрицы второго порядка

Линейное преобразование плоскости (2) вполне определяется таблицей коэффициентов, которая называется *квадратной матрицей второго порядка* и обозначается

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ или } A = \left\| \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \right\|.$$

Числа a_{11} , a_{12} , a_{21} , a_{22} называются *элементами* матрицы A .

Каждому линейному преобразованию плоскости соответствует квадратная матрица второго порядка и наоборот.

Пусть вслед за линейным преобразованием плоскости (2) выполнено линейное преобразование

$$\left. \begin{aligned} x'' &= b_{11}x' + b_{12}y', \\ y'' &= b_{21}x' + b_{22}y'. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Последовательное выполнение этих двух преобразований переводит точку $M(x, y)$ в точку $M''(x'', y'')$, т. е. является новым преобразованием

$$\left. \begin{aligned} x'' &= c_{11}x + c_{12}y, \\ y'' &= c_{21}x + c_{22}y, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

которое снова будет линейным, в чем легко убедиться, подставляя в (5) значения для x' и y' из соотношений (2):

$$\left. \begin{aligned} x'' &= b_{11}(a_{11}x + a_{12}y) + b_{12}(a_{21}x + a_{22}y), \\ y'' &= b_{21}(a_{11}x + a_{12}y) + b_{22}(a_{21}x + a_{22}y) \end{aligned} \right\}$$

или

$$\left. \begin{aligned} x'' &= (b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21})x + (b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22})y, \\ y'' &= (b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21})x + (b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22})y. \end{aligned} \right\}$$

Преобразование (6) имеет матрицу

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} c_{11} &= b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21}; & c_{12} &= b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22}; \\ c_{21} &= b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21}; & c_{22} &= b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22}. \end{aligned}$$

Таким образом, матрицу C преобразования (6) можно найти по матрицам A и B преобразований (2) и (5) соответственно.

Преобразование, полученное в результате последовательного выполнения двух данных преобразований, называется их *произведением*. Операция, в результате которой по матрицам A и B данных линейных преобразований плоскости находится матрица произведения этих преобразований, называется *умножением* матриц.

Две матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

называются *равными*, если

$$a_{11} = b_{11}, a_{12} = b_{12}, a_{21} = b_{21}, a_{22} = b_{22},$$

т. е. если равны элементы матриц, занимающие одинаковые места.

В рассмотренном примере мы имеем:

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Умножение матрицы B на матрицу A выполняется по правилу «строка на столбец». Это означает, что при вычислении матрицы $C=BA$ для получения элемента c_{ik} ($i, k=1, 2$) матрицы C нужно составить сумму произведений элементов i -й строки матрицы B на соответствующие элементы k -го столбца матрицы A . Таким образом, равенство (7) может быть коротко записано в виде

$$C = BA.$$

Пример 1. Найти результат последовательного выполнения преобразований

$$\left. \begin{aligned} x' &= 3x + 2y, \\ y' &= x + 5y \end{aligned} \right\} \quad \text{и} \quad \left. \begin{aligned} x'' &= x' + 3y', \\ y'' &= 2x' - y'. \end{aligned} \right\}$$

Решение.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$C = BA = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 3 \cdot 5 \\ 2 \cdot 3 - 1 \cdot 1 & 2 \cdot 2 - 1 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 17 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Произведением данных преобразований будет преобразование

$$\begin{cases} x'' = 6x + 17y, \\ y'' = 5x - y. \end{cases}$$

Пример 2. Найти матрицы AB и BA , если

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 & 3(-3) + (-1) \cdot 5 \\ 2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 & 2(-3) + 4 \cdot 5 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -14 \\ 10 & 14 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BA &= \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + (-3) \cdot 2 & 1(-1) + (-3) \cdot 4 \\ 2 \cdot 3 + 5 \cdot 2 & 2(-1) + 5 \cdot 4 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -3 & -13 \\ 16 & 18 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Последний пример показывает, что $AB \neq BA$, т. е. при умножении квадратных матриц второго порядка переместительный закон не имеет места.

Отсюда следует, что результат последовательного выполнения двух линейных преобразований плоскости зависит от порядка, в котором выполняются эти преобразования.

§ 4. Квадратные матрицы третьего порядка

Линейное преобразование (4) вполне определяется таблицей коэффициентов, которая называется *квадратной матрицей третьего порядка* и обозначается

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad A = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \right\|.$$

Числа a_{ik} ($i, k = 1, 2, 3$) называются *элементами* матрицы A . Каждому линейному преобразованию пространства соответствует квадратная матрица третьего порядка и наоборот.

Две квадратные матрицы третьего порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

считаются *равными*, если

$$a_{ik} = b_{ik} \quad (i, k = 1, 2, 3),$$

т. е. если равны элементы матриц, занимающие одинаковые места.

Пусть вслед за линейным преобразованием пространства (4) с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

выполнено линейное преобразование

$$\left. \begin{aligned} x'' &= b_{11}x' + b_{12}y' + b_{13}z', \\ y'' &= b_{21}x' + b_{22}y' + b_{23}z', \\ z'' &= b_{31}x' + b_{32}y' + b_{33}z' \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

с матрицей

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}.$$

Последовательное выполнение этих двух преобразований переводит точку $M(x, y, z)$ в точку $M''(x'', y'', z'')$, т. е. является новым преобразованием

$$\left. \begin{aligned} x'' &= c_{11}x + c_{12}y + c_{13}z, \\ y'' &= c_{21}x + c_{22}y + c_{23}z, \\ z'' &= c_{31}x + c_{32}y + c_{33}z, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

которое снова будет линейным, в чем легко убедиться, подставляя в (8) значения для x' , y' , z' из соотношений (4). Элементы матрицы C линейного преобразования (9) выражаются через элементы матриц A и B следующим образом:

$$C = \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + b_{13}a_{31} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} + b_{13}a_{32} & b_{11}a_{13} + b_{12}a_{23} + b_{13}a_{33} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} + b_{23}a_{31} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} + b_{23}a_{32} & b_{21}a_{13} + b_{22}a_{23} + b_{23}a_{33} \\ b_{31}a_{11} + b_{32}a_{21} + b_{33}a_{31} & b_{31}a_{12} + b_{32}a_{22} + b_{33}a_{32} & b_{31}a_{13} + b_{32}a_{23} + b_{33}a_{33} \end{pmatrix}.$$

Операция, в результате которой по матрицам A и B данных линейных преобразований пространства находится матрица C произведения этих преобразований, называется *умножением* квадратных матриц третьего порядка.

Матрица C равна произведению матрицы B на матрицу A

$$C = BA.$$

Умножение матрицы B на матрицу A , как и в случае умножения квадратных матриц, выполняется по правилу «строка на столбец».

Пример 1. Найти результат последовательного выполнения преобразований

$$\left. \begin{aligned} x' &= 2x - 3y + 5z, \\ y' &= \quad y + 4z, \\ z' &= 2x + 2y + 3z \end{aligned} \right\} \text{ и } \left. \begin{aligned} x'' &= 3x' + y' - 2z', \\ y'' &= 2x' + 3y' + z', \\ z'' &= 4x' \quad \quad + 5z'. \end{aligned} \right\}$$

Решение.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} C = BA &= \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 + 1 \cdot 0 - 2 \cdot 2 & 3(-3) + 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 & 3 \cdot 5 + 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 2 & 2(-3) + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & 2 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 1 \cdot 3 \\ 4 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 5 \cdot 2 & 4(-3) + 0 \cdot 1 + 5 \cdot 2 & 4 \cdot 5 + 0 \cdot 4 + 5 \cdot 3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -12 & 13 \\ 6 & -1 & 25 \\ 18 & -2 & 35 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Произведением данных преобразований будет преобразование

$$\left. \begin{aligned} x'' &= 2x - 12y + 13z, \\ y'' &= 6x - y + 25z, \\ z'' &= 18x - 2y + 35z. \end{aligned} \right\}$$

Пример 2. Найти произведение матрицы A на матрицу B , где A и B — матрицы примера 1.

Решение.

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 - 3 \cdot 2 + 5 \cdot 4 & 2 \cdot 1 - 3 \cdot 3 + 5 \cdot 0 & 2 \cdot (-2) - 3 \cdot 1 + 5 \cdot 5 \\ 0 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 4 \cdot 4 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 4 \cdot 0 & 0 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 + 4 \cdot 5 \\ 2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 & 2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 0 & 2 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 5 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 20 & -7 & 18 \\ 18 & 3 & 21 \\ 22 & 8 & 13 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Приведенный пример показывает, что $AB \neq BA$, т. е. для умножения квадратных матриц третьего порядка переместительный закон не имеет места.

Отсюда следует, что результат последовательного выполнения двух линейных преобразований пространства зависит от порядка, в котором эти преобразования выполняются.

§ 5. Основные действия над матрицами

До сих пор мы рассматривали только квадратные матрицы второго и третьего порядков, элементами которых служили числа. Дадим теперь более широкое определение матрицы.

О п р е д е л е н и е. *Матрицей называется прямоугольная таблица элементов, состоящая из m строк и n столбцов. Элементами матрицы могут служить числа или же функции.*

Матрица называется *прямоугольной*, если число ее строк не равно числу столбцов ($m \neq n$). Например,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Если же $m = n$, то матрица называется *квадратной*. Число строк квадратной матрицы называется *порядком* этой матрицы.

Матрицы A и B считаются *равными*, если они имеют одинаковое число строк и столбцов и если при этом элементы матриц A и B , расположенные на одинаковых местах, равны между собой. Например, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

то матрицы A и B равны, что записывают так: $A = B$.

К основным действиям над матрицами относятся умножение и сложение матриц и умножение матрицы на число.

Умножение квадратных матриц второго и третьего порядков мы рассмотрели в § 3 и 4. Аналогично выполняется умножение квадратных матриц любого порядка.

Умножение прямоугольных матриц возможно, если число столбцов первого сомножителя равно числу строк второго; в этом случае их произведение находится по правилу «строка на столбец». Поясним сказанное примером.

Пусть требуется умножить матрицу A на матрицу B , где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Такое умножение возможно, так как число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B . Выполняя умножение по правилу «строка на столбец», получим

$$AB = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + (-1)1 \\ 3 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 4 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Произведение же BA в этом случае лишено смысла, так как число столбцов матрицы B не равно числу строк матрицы A . Уже из этого примера следует, что для умножения прямоугольных матриц переместительный закон не выполняется.

Можно показать, что сочетательный закон умножения выполняется как для квадратных, так и для прямоугольных матриц, т. е. имеет место равенство $(AB)C = A(BC)$.

Определим теперь сложение матриц.

О п р е д е л е н и е. Суммой двух матриц A и B , у которых число строк и число столбцов матрицы A соответственно равны числу строк и числу столбцов матрицы B , называется такая третья матрица C , элементы которой получаются сложением соответствующих элементов матриц A и B .

Пример. Найти сумму матриц A и B , если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 7 \\ 7 & 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что если сумма матриц A и B имеет смысл, то

$$A + B = B + A.$$

Определим, наконец, умножение матрицы на число.

О п р е д е л е н и е. Произведением матрицы A на число k называется матрица kA , элементы которой равны соответствующим элементам матрицы A , умноженным на число k :

$$k \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \end{pmatrix}.$$

Легко показать, что

$$(kA)B = A(kB) = k(AB)$$

и что

$$k(lA) = (kl)A,$$

где k и l — числа, а A и B — матрицы.

§ 6. Теорема об умножении определителей

Определитель, составленный из тех же элементов, что и квадратная матрица (и расположенных в том же порядке), называется *определителем* этой матрицы.

Определитель матрицы A мы будем обозначать символом $|A|$.

Т е о р е м а. *Определитель произведения двух матриц равен произведению определителей этих матриц.*

Докажем эту теорему для матриц второго порядка.

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

Вычислим произведение определителей $|A|$ и $|B|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$|B| = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21};$$

$$\begin{aligned} |A| \cdot |B| &= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) = a_{11}a_{22}b_{11}b_{22} - \\ &- a_{12}a_{21}b_{11}b_{22} - a_{11}a_{22}b_{12}b_{21} + a_{12}a_{21}b_{12}b_{21}. \end{aligned}$$

Теперь вычислим определитель $|AB|$:

$$\begin{aligned} |AB| &= \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{vmatrix} = \\ &= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})(a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) - (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})(a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}) = \\ &= a_{11}b_{11}a_{21}b_{12} + a_{12}b_{21}a_{21}b_{12} + a_{11}b_{11}a_{22}b_{22} + a_{12}b_{21}a_{22}b_{22} - \\ &- a_{11}b_{12}a_{21}b_{11} - a_{12}b_{22}a_{21}b_{11} - a_{11}b_{12}a_{22}b_{21} - a_{12}b_{22}a_{22}b_{21} = \\ &= a_{11}b_{11}a_{22}b_{22} - a_{12}a_{21}b_{11}b_{22} - a_{11}b_{12}a_{22}b_{21} + a_{12}b_{21}a_{21}b_{12}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $|AB| = |A| \cdot |B|$.

В случае квадратных матриц третьего порядка теорема об умножении определителей доказывается аналогично.

§ 7. Обратная матрица

Квадратная матрица называется *вырожденной*, если ее определитель равен нулю. Если же определитель матрицы не равен нулю, то матрица называется *невырожденной*. Соответ-

ственно своим матрицам называются и линейные преобразования.

Из § 6 следует, что произведение матриц, хотя бы одна из которых вырожденная, будет вырожденной матрицей. Произведение же любых невырожденных матриц будет невырожденной матрицей.

Рассмотрим тождественное преобразование пространства

$$\left. \begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= y, \\ z' &= z, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

которое все точки пространства оставляет на месте. Преобразованию (10) соответствует матрица

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

которая называется *единичной*.

Легко видеть, что единичная матрица E перестановочна с любой матрицей данного порядка, т. е.

$$AE = EA.$$

Введем в рассмотрение обратную матрицу A^{-1} , т. е. такую, что

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E.$$

Ясно, что вырожденная матрица не имеет обратной. В самом деле, если матрица A вырожденная, то $|A| = 0$ и, следовательно

$$AB \neq E$$

для любой матрицы B , так как

$$|A| \cdot |B| = 0, \text{ а } |E| = 1.$$

Пусть дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Матрица, полученная из матрицы A заменой строк столбцами, называется *транспонированной* к матрице A ; мы будем обозначать ее A' . Таким образом,

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Составим матрицу A^* , элементами которой являются алгебраические дополнения к соответствующим элементам матрицы A' ,

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

где A_{ik} есть алгебраическое дополнение к элементу a_{ik} определителя

$$|A'| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}. \quad (11)$$

Составленная таким образом матрица A^* называется *присоединенной* (или *взаимной*) матрицей к матрице A .

Найдем произведения AA^* и A^*A . Легко видеть, что

$$AA^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix} = d \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = dE,$$

$$A^*A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix} = d \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = dE,$$

где d есть значение определителя (11).

Действительно, умножая i -ю строку матрицы A на i -й столбец матрицы A^* , мы получим разложение определителя (11) по i -й строке. Умножая же i -ю строку матрицы A^* на i -й столбец матрицы A , мы получим разложение определителя (11) по i -му столбцу. Во всех остальных случаях будет получена сумма произведений элементов некоторого ряда определителя (11) на алгебраические дополнения параллельного ряда, которая, как известно, равна нулю.

Таким образом, доказано, что $AA^* = A^*A = dE$.

Теперь покажем, что для каждой невырожденной матрицы существует обратная матрица, и найдем ее вид.

Пусть A — невырожденная матрица, а A^* — матрица, присоединенная к матрице A . Разделив все члены присоединенной матрицы A^* на d , где d есть значение определителя матрицы A , получим матрицу

$$B = \frac{1}{d} A^* = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{d} & \frac{A_{21}}{d} & \frac{A_{31}}{d} \\ \frac{A_{12}}{d} & \frac{A_{22}}{d} & \frac{A_{32}}{d} \\ \frac{A_{13}}{d} & \frac{A_{23}}{d} & \frac{A_{33}}{d} \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Легко показать, что матрица (12) является обратной по отношению к матрице

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Действительно,

$$AB = A \left(\frac{1}{d} A^* \right) = \frac{1}{d} (AA^*) = \frac{1}{d} (dE) = E$$

и

$$BA = \left(\frac{1}{d} A^* \right) A = \frac{1}{d} (A^* A) = \frac{1}{d} (dE) = E.$$

Итак, матрица $B = \frac{1}{d} A^*$ является обратной к матрице A , т. е. если

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

есть невырожденная матрица, то обратной к ней будет матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{d} A^*.$$

Из теоремы об умножении определителей следует, что определитель матрицы A^{-1} равен $\frac{1}{|A|}$. Действительно, так как

$$AA^{-1} = E,$$

то

$$|A| |A^{-1}| = |E|.$$

Но $|E| = 1$; следовательно, $|A| |A^{-1}| = 1$, откуда

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}.$$

Таким образом, обратная матрица A^{-1} будет также невырожденной.

Так как $A^{-1}A = E$, то матрица A будет перестановочна с обратной матрицей A^{-1} .

Аналогично определяется и находится обратная матрица для невырожденной квадратной матрицы второго порядка.

Пример. Дана матрица (см. пример § 2)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти обратную матрицу.

Р е ш е н и е. Запишем транспонированную к A матрицу A' :

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем присоединенную к A матрицу A^* :

$$A^* = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Вычислим значение определителя d матрицы A :

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 + 6 - 1 - 3 - 4 = 1.$$

Тогда

$$A^{-1} = \frac{1}{d} A^* = 1 \cdot A^* = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

§ 8. Применение матриц к решению систем линейных уравнений

Рассмотрим систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Используя умножение прямоугольных матриц, систему (13) можно записать в матричной форме

$$AX = B,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Пусть матрица A — невырожденная. Тогда она имеет обратную матрицу A^{-1} . Умножая обе части равенства $AX = B$ слева на матрицу A^{-1} , получим

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B,$$

откуда

$$X = A^{-1}B,$$

так как

$$A^{-1}(AX) = (A^{-1}A)X = EX = X.$$

Произведение $A^{-1}B$ есть матрица, состоящая из одного столбца, элементами которого являются неизвестные x_1, x_2, x_3 . То, что полученные значения неизвестных действительно являются решением системы, легко проверить, подставляя $X = A^{-1}B$ в уравнение $AX = B$:

$$A(A^{-1}B) = (AA^{-1})B = EB = B.$$

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} x + 2y - z &= 8, \\ 2x - y + z &= -3, \\ 3x + y - 2z &= 11. \end{aligned} \right\}$$

Решение. Запишем данную систему уравнений в матричной форме

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Здесь

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу A^{-1} :

$$d = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 - 2 + 6 - 3 - 1 + 8 = 10,$$

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 7 & 1 & -3 \\ 5 & 5 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{d}A^* = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 7 & 1 & -3 \\ 5 & 5 & -5 \end{pmatrix}.$$

Теперь найдем матрицу X :

$$X = A^{-1}B; \quad X = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 7 & 1 & -3 \\ 5 & 5 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 11 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 8 & -9 & +11 \\ 56 & -3 & -33 \\ 40 & -15 & -55 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ -30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, матрица

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

является решением системы, откуда следует, что

$$x = 1, \quad y = 2, \quad z = -3.$$

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} x - 3y + 2z &= -3, \\ 2x + y - 3z &= -13, \\ 3x + 2y + z &= 4. \end{aligned} \right\}$$

Решение. Запишем данную систему уравнений в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -13 \\ 4 \end{pmatrix}$$

или

$$AX = B,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} -3 \\ -13 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$X = A^{-1}B.$$

Найдем матрицу A^{-1} :

$$d = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 8 + 27 - 6 + 6 + 6 = 42,$$

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 7 \\ -11 & -5 & 7 \\ 1 & -11 & 7 \end{pmatrix},$$

$$A^{-1} = \frac{1}{d} A^* = \frac{1}{42} \begin{pmatrix} 7 & 7 & 7 \\ -11 & -5 & 7 \\ 1 & -11 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{42} \begin{pmatrix} 7 & 7 & 7 \\ -11 & -5 & 7 \\ 1 & -11 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ -13 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{42} \begin{pmatrix} -84 \\ 126 \\ 168 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Матрица

$$X = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

и является решением системы, откуда следует, что

$$x = -2, y = 3, z = 4.$$

§ 9. Ортогональные преобразования

Рассмотрим для определенности трехмерный случай. Линейное преобразование, переводящее точку $M(x_1, x_2, x_3)$ в точку $M_1(y_1, y_2, y_3)$, определяется формулами

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ y_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

и имеет матрицу третьего порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Линейное преобразование (14) пространства можно рассматривать как линейное преобразование векторов в пространстве. Действительно, пусть линейное преобразование пространства задано формулами (14). Легко проверить, что оно переводит форму с постоянными коэффициентами A_i ($i = 1, 2, 3, 4$)

$$A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4,$$

называемую *линейной формой*, в линейную форму

$$B_1y_1 + B_2y_2 + B_3y_3 + A_4,$$

а это значит, что преобразование (14) плоскость переводит в плоскость, пересекающиеся плоскости — в пересекающиеся плоскости, прямые — в прямые.

Пусть теперь дан вектор \overline{MN} , где $M(x'_1, x'_2, x'_3)$ и $N(x''_1, x''_2, x''_3)$. По формулам (14) точки M и N преобразуются в точки $M_1(y'_1, y'_2, y'_3)$ и $N_1(y''_1, y''_2, y''_3)$, координаты которых находятся по формулам:

$$\left. \begin{aligned} y'_1 &= a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 + a_{13}x'_3, \\ y'_2 &= a_{21}x'_1 + a_{22}x'_2 + a_{23}x'_3, \\ y'_3 &= a_{31}x'_1 + a_{32}x'_2 + a_{33}x'_3, \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} y''_1 &= a_{11}x''_1 + a_{12}x''_2 + a_{13}x''_3, \\ y''_2 &= a_{21}x''_1 + a_{22}x''_2 + a_{23}x''_3, \\ y''_3 &= a_{31}x''_1 + a_{32}x''_2 + a_{33}x''_3. \end{aligned} \right\}$$

Следовательно, вектор

$$\overline{MN} \{x''_1 - x'_1, x''_2 - x'_2, x''_3 - x'_3\}$$

преобразуется в вектор

$$\overline{MN} \{y'_1 - y'_1, y'_2 - y'_2, y'_3 - y'_3\},$$

причем

$$\left. \begin{aligned} y'_1 - y'_1 &= a_{11}(x''_1 - x'_1) + a_{12}(x''_2 - x'_2) + a_{13}(x''_3 - x'_3), \\ y'_2 - y'_2 &= a_{21}(x''_1 - x'_1) + a_{22}(x''_2 - x'_2) + a_{23}(x''_3 - x'_3), \\ y'_3 - y'_3 &= a_{31}(x''_1 - x'_1) + a_{32}(x''_2 - x'_2) + a_{33}(x''_3 - x'_3), \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

т. е. координаты векторов преобразуются по тем же формулам (14), что и координаты точек.

В дальнейшем мы будем рассматривать только такие линейные преобразования пространства в себя, которые сохраняют расстояние между двумя точками. Такие линейные преобразования называются *ортогональными*. Ортогональные преобразования сохраняют и углы между прямыми, так как переводят любой треугольник в равный ему треугольник.

Найдем те условия, которые требуется наложить на элементы матрицы (15), чтобы линейное преобразование было ортогональным.

По формулам (16) единичные векторы координатных осей i, j, k переходят соответственно в векторы

$$\left. \begin{aligned} i' &= a_{11}i + a_{21}j + a_{31}k, \\ j' &= a_{12}i + a_{22}j + a_{32}k, \\ k' &= a_{13}i + a_{23}j + a_{33}k. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Проверим справедливость приведенных формул. Единичный вектор i имеет координаты $\{1, 0, 0\}$. Пусть вектор i' имеет координаты $\{i'_x, i'_y, i'_z\}$. Пользуясь формулами (16), получим:

$$\begin{aligned} i'_x &= a_{11} \cdot 1 + a_{12} \cdot 0 + a_{13} \cdot 0 = a_{11}, \\ i'_y &= a_{21} \cdot 1 + a_{22} \cdot 0 + a_{23} \cdot 0 = a_{21}, \\ i'_z &= a_{31} \cdot 1 + a_{32} \cdot 0 + a_{33} \cdot 0 = a_{31}. \end{aligned}$$

Таким образом, вектор $i \{1, 0, 0\}$ переходит в вектор $i' \{a_{11}, a_{21}, a_{31}\}$. Аналогично можно показать, что вектор $j \{0, 1, 0\}$ переходит в вектор $j' \{a_{12}, a_{22}, a_{32}\}$ и вектор $k \{0, 0, 1\}$ переходит в вектор $k' \{a_{13}, a_{23}, a_{33}\}$.

Так как мы рассматриваем ортогональное преобразование, то векторы i', j' и k' должны быть единичными и попарно ортогональными. Эти требования налагают на элементы матрицы шесть условий:

$$\left. \begin{aligned} i'i' &= a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 = 1, \\ j'j' &= a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 = 1, \\ k'k' &= a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 = 1, \\ i'j' &= a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} = 0, \\ i'k' &= a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23} + a_{31}a_{33} = 0, \\ j'k' &= a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Совокупность равенств (18) запишем в виде одного матричного равенства

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Можно показать и обратное, а именно: если удовлетворяется равенство (19), то линейное преобразование (14) будет ортогональным.

Итак, для того чтобы линейное преобразование (14) было ортогональным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство (19).

Условие (19) можно записать в виде

$$A'A = E, \quad (20)$$

где A' — матрица, транспонированная к матрице A . Из равенства (20) следует, что

$$A' = A^{-1}, \quad (21)$$

где A^{-1} — матрица, обратная матрице A .

Матрица, удовлетворяющая условию (21), называется *ортогональной*. Иными словами, ортогональной матрицей называется такая матрица A , что транспонированная к ней матрица A' совпадает с обратной матрицей A^{-1} .

Таким образом, в декартовой системе координат ортогональному преобразованию соответствует ортогональная матрица, и обратно, ортогональная матрица определяет ортогональное преобразование.

Ортогональное преобразование плоскости в себя определяется аналогично. Для того чтобы преобразование плоскости в себя было ортогональным, необходимо и достаточно, чтобы матрица этого преобразования была ортогональной.

Пример 1. Проверить, что преобразование

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \\ y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha \end{cases}$$

является ортогональным.

Решение.

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha & -\cos \alpha \sin \alpha + \sin \alpha \cos \alpha \\ -\sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha & \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Так как условие (20) выполнено, то данное преобразование является ортогональным.

Пример 2. Проверить, что преобразование

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3, \\ y_2 &= \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3, \\ y_3 &= \frac{2}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 \end{aligned} \right\}$$

является ортогональным.

Решение. Проверим выполнение условия (20). Найдем произведение $A'A$:

$$A'A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \\ = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, данное преобразование является ортогональным.

§ 10. Собственные векторы и собственные значения

Рассмотрим линейное преобразование (14). Векторы $x\{x_1, x_2, x_3\}$ и $y\{y_1, y_2, y_3\}$ будем записывать в виде матриц:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ и } y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Тогда формулы (14) можно записать в матричной форме

$$y = Ax, \quad (22)$$

где A — матрица преобразования (14).

Если данное линейное преобразование переводит некоторый ненулевой вектор a в параллельный вектор λa , то век-

тор \mathbf{a} называется *собственным вектором* этого линейного преобразования, а число λ — *собственным значением* этого преобразования.

Чтобы вектор \mathbf{x} был собственным вектором линейного преобразования (14), должно выполняться условие

$$\mathbf{y} = \lambda \mathbf{x}, \text{ т. е. } A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x},$$

которое в развернутом виде запишется так:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= \lambda x_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= \lambda x_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= \lambda x_3 \end{aligned} \right\}$$

или

$$\left. \begin{aligned} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + a_{23}x_3 &= 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33} - \lambda)x_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Необходимым и достаточным условием того, что преобразование (14) будет иметь собственный вектор, является равенство нулю определителя однородной системы (23), т. е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (24)$$

Уравнение (24) называется *характеристическим уравнением* матрицы A , а корни его — *характеристическими корнями* матрицы A (или *собственными значениями* матрицы A). Вещественные собственные значения матрицы A и являются собственными значениями данного линейного преобразования.

Найдя из уравнения (24) какое-нибудь собственное значение λ данного линейного преобразования (14), мы можем затем найти соответствующий ему собственный вектор, решив систему (23).

Для линейного преобразования плоскости собственные векторы и собственные значения определяются аналогично.

Пример 1. Найти собственные векторы линейного преобразования с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение матрицы A

$$\begin{vmatrix} 7 - \lambda & -2 & 0 \\ -2 & 6 - \lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

или

$$\lambda^3 - 18\lambda^2 + 99\lambda - 162 = 0.$$

Подбором находим, что $\lambda_1 = 3$ является корнем этого уравнения. Тогда

$$\lambda^3 - 18\lambda^2 + 99\lambda - 162 = (\lambda - 3)(\lambda^2 - 15\lambda + 54) = 0.$$

Решая квадратное уравнение

$$\lambda^2 - 15\lambda + 54 = 0,$$

находим еще два корня: $\lambda_2 = 6$ и $\lambda_3 = 9$.

Найдем собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = 3$. Подставляя $\lambda_1 = 3$ в систему (23), получим

$$\left. \begin{aligned} (7-3)x_1 - 2x_2 + 0 \cdot x_3 &= 0, \\ -2x_1 + (6-3)x_2 - 2x_3 &= 0, \\ 0 \cdot x_1 - 2x_2 + (5-3)x_3 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

или

$$\left. \begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 &= 0, \\ -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 0, \\ -2x_2 + 2x_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Из первого и третьего уравнений системы (25) следует, что

$$x_2 = 2x_1, \quad x_2 = x_3.$$

Полагая $x_1 = k$, где k — произвольное число, отличное от нуля, получим

$$x_1 = k, \quad x_2 = 2k, \quad x_3 = 2k.$$

Таким образом, собственному значению $\lambda_1 = 3$ соответствует собственный вектор

$$x_{\lambda_1} \{ k, 2k, 2k \}.$$

Аналогично найдем, что собственными векторами, соответствующими собственным значениям $\lambda_2 = 6$ и $\lambda_3 = 9$, будут векторы

$$x_{\lambda_2} \{ 2k, k, -2k \}$$

и

$$x_{\lambda_3} \{ -2k, 2k, -k \}.$$

Из рассматриваемого примера видно, что собственный вектор линейного преобразования определяется не однозначно, а с точностью до коэффициента k (коэффициента растяжения).

Полагая в приведенном примере $k = 1$, получим собственные векторы

$$x_{\lambda_1} \{ 1, 2, 2 \}, \quad x_{\lambda_2} \{ 2, 1, -2 \} \quad \text{и} \quad x_{\lambda_3} \{ -2, 2, -1 \}.$$

Задача о нахождении собственных векторов линейного преобразования плоскости решается аналогично.

Пример 2. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение матрицы и найдем его корни:

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda & 4 \\ 5 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\lambda^2 - 5\lambda - 14 = 0.$$

Корни $\lambda_1 = 7$ и $\lambda_2 = -2$ этого уравнения являются собственными значениями матрицы A .

Найдем собственный вектор матрицы A , соответствующий собственному значению $\lambda_1 = 7$, решая систему уравнений

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda) x_1 + a_{12} x_2 = 0, \\ a_{21} x_1 + (a_{22} - \lambda) x_2 = 0 \end{cases} \quad (26)$$

при $\lambda = 7$.

Подставляя значение $\lambda = 7$ в (26), получим для данной матрицы систему

$$\begin{cases} -4x_1 + 4x_2 = 0, \\ 5x_1 - 5x_2 = 0, \end{cases}$$

откуда следует, что $x_1 = x_2$. Полагая $x_1 = 1$, находим собственный вектор $a_{\lambda_1} \{ 1, 1 \}$.

Аналогично найдем, что собственному значению $\lambda_2 = -2$ соответствует собственный вектор $a_{\lambda_2} \{ 4, -5 \}$.

§ 11. Линейные преобразования с симметрическими матрицами

Симметрической матрицей называется такая матрица, которая совпадает со своей транспонированной. Поэтому, если A — симметрическая матрица, то

$$A = A' \quad \text{или} \quad a_{ik} = a_{ki}.$$

Докажем, что все собственные значения симметрической матрицы второго порядка являются действительными числами.

Пусть дана симметрическая матрица второго порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Составим ее характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0.$$

Покажем, что дискриминант D этого квадратного уравнения не может быть отрицательным. Действительно,

$$D = (a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2. \quad (27)$$

Так как сумма двух неотрицательных чисел не может быть отрицательным числом, то характеристическое уравнение матрицы A имеет только действительные корни.

Линейное преобразование с симметрической матрицей называется *симметрическим линейным преобразованием*. Симметрическое линейное преобразование плоскости имеет пару собственных векторов, которые перпендикулярны друг к другу. Направления этих векторов называются *главными*.

Координаты собственного вектора, соответствующего собственному значению λ матрицы A , удовлетворяют системе

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 = 0, \\ a_{12}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 = 0, \end{cases} \quad (28)$$

где x_1 и x_2 — координаты собственного вектора матрицы A . Представим систему (28) следующим образом:

$$\begin{cases} \lambda x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ \lambda x_2 = a_{12}x_1 + a_{22}x_2. \end{cases} \quad (29)$$

Пусть $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\mathbf{a}_{\lambda_1} \{l_1, m_1\}$ и $\mathbf{a}_{\lambda_2} \{l_2, m_2\}$ — собственные векторы, соответствующие собственным значениям λ_1 и λ_2 .

Тогда из системы (29) следуют равенства

$$\begin{cases} \lambda_1 l_1 = a_{11}l_1 + a_{12}m_1, \\ \lambda_1 m_1 = a_{12}l_1 + a_{22}m_1. \end{cases} \quad (30)$$

Умножая первое из равенств (30) на l_2 , а второе — на m_2 и складывая, получим

$$\lambda_1 (l_1 l_2 + m_1 m_2) = a_{11} l_1 l_2 + a_{12} (l_1 m_2 + l_2 m_1) + a_{22} m_1 m_2. \quad (31)$$

Меняя ролями \mathbf{a}_{λ_1} и \mathbf{a}_{λ_2} , совершенно аналогично находим

$$\lambda_2 (l_2 l_1 + m_2 m_1) = a_{11} l_2 l_1 + a_{12} (l_2 m_1 + l_1 m_2) + a_{22} m_2 m_1. \quad (32)$$

Вычитая из равенства (31) равенство (32), будем иметь

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(l_1 l_2 + m_1 m_2) = 0.$$

Так как $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, то

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 = 0,$$

а это и означает, что векторы $a_{\lambda_1} \{l_1, m_1\}$ и $a_{\lambda_2} \{l_2, m_2\}$ взаимно перпендикулярны.

Пусть теперь $\lambda_1 = \lambda_2$. Тогда дискриминант (27) равен нулю, откуда следует, что

$$a_{11} = a_{22} \text{ и } a_{12} = 0.$$

Матрица преобразования в этом случае примет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix},$$

а преобразование запишется так:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1, \\ y_2 = a_{22}x_2. \end{cases} \quad (33)$$

В таком случае

$$\lambda = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} = \frac{a_{11} + a_{11}}{2} = a_{11}$$

и, следовательно,

$$\begin{cases} y_1 = \lambda x_1, \\ y_2 = \lambda x_2. \end{cases} \quad (34)$$

Преобразование (34) является *преобразованием подобия*. При таком преобразовании любой вектор окажется собственным вектором с собственным значением λ , значит, любая пара ненулевых взаимно перпендикулярных векторов будет парой собственных взаимно перпендикулярных векторов.

Все собственные значения матрицы симметрического линейного преобразования пространства также действительные числа. Можно доказать, что симметрические линейные преобразования пространства имеют три попарно перпендикулярных собственных вектора, направления которых называются главными. На доказательстве последних утверждений мы не останавливаемся.

§ 12. Приведение к диагональному виду матрицы симметрического линейного преобразования в пространстве

Пусть в некоторой системе координат $Ox_1x_2x_3$ симметрическое линейное преобразование в пространстве определяется формулами

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ y_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Преобразование (35) переводит точку $M(x_1, x_2, x_3)$ в точку $M'(y_1, y_2, y_3)$. Если теперь перейти к новой системе координат в пространстве, то координаты точек M и M' изменятся, а линейное преобразование будет определяться новой матрицей.

Найдем вид матрицы симметрического преобразования, если новая система координат выбрана так, что направления новых осей являются главными.

Обозначим единичные векторы главных направлений i', j', k' . Примем эти векторы за координатные орты новой системы координат $Ox'_1x'_2x'_3$ и найдем матрицу данного преобразования в этой системе.

Пусть искомое линейное преобразование будет

$$\left. \begin{aligned} y'_1 &= a'_{11}x'_1 + a'_{12}x'_2 + a'_{13}x'_3, \\ y'_2 &= a'_{21}x'_1 + a'_{22}x'_2 + a'_{23}x'_3, \\ y'_3 &= a'_{31}x'_1 + a'_{32}x'_2 + a'_{33}x'_3. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Так как

$$\begin{aligned} i' \{ x'_1 &= 1, x'_2 = 0, x'_3 = 0 \}, \\ j' \{ x'_1 &= 0, x'_2 = 1, x'_3 = 0 \}, \\ k' \{ x'_1 &= 0, x'_2 = 0, x'_3 = 1 \}, \end{aligned}$$

а преобразование переводит i' в $\lambda'_1 i'$ с координатами

$$\lambda'_1 i' \{ y'_1 = \lambda_1, y'_2 = 0, y'_3 = 0 \},$$

то из (36) следует

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= a'_{11} \cdot 1 + a'_{12} \cdot 0 + a'_{13} \cdot 0, \\ 0 &= a'_{21} \cdot 1 + a'_{22} \cdot 0 + a'_{23} \cdot 0, \\ 0 &= a'_{31} \cdot 1 + a'_{32} \cdot 0 + a'_{33} \cdot 0. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Из (37) находим:

$$a'_{11} = \lambda_1, \quad a'_{21} = 0, \quad a'_{31} = 0.$$

Аналогично получим:

$$\begin{aligned} a'_{12} &= 0, \quad a'_{22} = \lambda_2, \quad a'_{32} = 0, \\ a'_{13} &= 0, \quad a'_{23} = 0, \quad a'_{33} = \lambda_3. \end{aligned}$$

Таким образом, матрица искомого преобразования (36) будет

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Матрица такого вида называется *диагональной*.

Данное линейное преобразование в новой системе координат определится формулами

$$\left. \begin{aligned} y'_1 &= \lambda_1 x'_1, \\ y'_2 &= \lambda_2 x'_2, \\ y'_3 &= \lambda_3 x'_3. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Преобразование (38) означает растяжение по трем попарно перпендикулярным направлениям с коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ соответственно, где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — собственные значения. Аналогично можно показать, что матрица симметрического линейного преобразования плоскости, отнесенной к главным направлениям, имеет диагональный вид:

$$\left. \begin{aligned} y'_1 &= \lambda_1 x'_1, \\ y'_2 &= \lambda_2 x'_2. \end{aligned} \right\}$$

§ 13. Приведение квадратичной формы к каноническому виду

Квадратичной формой от трех переменных x_1, x_2, x_3 называется однородный многочлен второй степени относительно этих переменных:

$$F = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3, \quad (39)$$

где a_{ik} ($i, k = 1, 2, 3$) — числовые коэффициенты.

Матрицей такой формы называется симметрическая матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (a_{ik} = a_{ki}), \quad (40)$$

где a_{ik} — коэффициенты квадратичной формы (39).

Будем рассматривать x_1, x_2, x_3 как декартовы координаты в системе $Ox_1x_2x_3$. Перепишем (39) в виде

$$\begin{aligned} F &= x_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + \\ &+ x_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) + \\ &+ x_3(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3). \end{aligned} \quad (39')$$

Из (39') легко понять, как составляется матрица (40) квадратичной формы F .

Вместе с квадратичной формой F рассмотрим симметрическое линейное преобразование

$$\left. \begin{aligned} x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ x'_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3. \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Тогда квадратичную форму можно рассматривать как скалярное произведение вектора x на вектор x' :

$$F = x_1 x'_1 + x_2 x'_2 + x_3 x'_3,$$

где $\{x_1, x_2, x_3\}$ — координаты вектора x , а $\{x'_1, x'_2, x'_3\}$ — координаты вектора x' , который ставится в соответствие вектору x преобразованием (41).

В новой системе векторы x и x' будут иметь новые координаты, а преобразование (41) будет определяться новой матрицей.

Выберем новую систему координат $O\tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3$ так, чтобы направления новых осей совпадали с главными направлениями матрицы A . Такое преобразование пространства будет ортогональным и, следовательно, сохранит величину скалярного произведения.

Пусть в новой системе координат вектор x имеет координаты $\{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3\}$, а вектор x' — координаты $\{\tilde{x}'_1, \tilde{x}'_2, \tilde{x}'_3\}$. В этом случае матрица линейного преобразования (41) будет иметь вид

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — собственные числа матрицы A . Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} \tilde{x}'_1 &= \lambda_1 \tilde{x}_1, \\ \tilde{x}'_2 &= \lambda_2 \tilde{x}_2, \\ \tilde{x}'_3 &= \lambda_3 \tilde{x}_3. \end{aligned} \right\}$$

Но тогда

$$F = x \cdot x' = \tilde{x}_1 \lambda_1 \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 \lambda_2 \tilde{x}_2 + \tilde{x}_3 \lambda_3 \tilde{x}_3$$

или

$$F = \lambda_1 \tilde{x}_1^2 + \lambda_2 \tilde{x}_2^2 + \lambda_3 \tilde{x}_3^2.$$

Полученный вид квадратичной формы F называется *каноническим*. Числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ называются *характеристическими числами* данной квадратичной формы (39). Направления собственных векторов матрицы A называются *главными направлениями* квадратичной формы.

Таким образом, квадратичная форма принимает канонический вид, если направления новых осей координат совпадают с главными направлениями квадратичной формы.

Аналогично квадратичная форма двух переменных

$$F = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2$$

определяется симметрической матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

и приводится к каноническому виду

$$F = \lambda_1 \tilde{x}_1^2 + \lambda_2 \tilde{x}_2^2.$$

Пример 1. Привести к каноническому виду квадратичную форму

$$F = 7x_1^2 + 6x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3.$$

Решение. Запишем матрицу A квадратичной формы

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Составим характеристическое уравнение матрицы A

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 6-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ или } \lambda^3 - 18\lambda^2 + 99\lambda - 162 = 0.$$

Решая его, найдем характеристические числа данной квадратичной формы: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 9$.

Следовательно, данная квадратичная форма приводится к каноническому виду

$$F = 3\tilde{x}_1^2 + 6\tilde{x}_2^2 + 9\tilde{x}_3^2.$$

Пример 2. Привести к каноническому виду квадратичную форму

$$F = 5x^2 + 8xy + 5y^2.$$

Решение. Матрицей этой квадратичной формы является

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Найдем ее собственные значения, для чего составим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ или } \lambda^2 - 10\lambda + 9 = 0,$$

откуда находим $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 9$.

Квадратичная форма $F = 5x^2 + 8xy + 5y^2$ приводится к каноническому виду

$$F = x_1^2 + 9y_1^2.$$

§ 14. Приведение к каноническому виду уравнений линий второго порядка

Пусть требуется определить, какая линия задается уравнением второго порядка

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + a_{13}x + a_{23}y + a_{33} = 0. \quad (42)$$

Как известно из аналитической геометрии, эта задача решается преобразованием координат точек кривой с помощью поворота осей и последующего параллельного переноса новой системы координат. Удачный выбор угла поворота осей координат дает возможность уничтожить в уравнении кривой член с произведением текущих координат. Эта часть работы является наиболее трудоемкой и значительно упрощается с применением матриц.

При повороте осей координат на угол α вокруг неподвижного начала старые координаты x, y произвольной точки выражаются через ее новые координаты x', y' по формулам

$$\left. \begin{aligned} x &= x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \\ y &= x' \sin \alpha + y' \cos \alpha. \end{aligned} \right\}$$

Упрощая уравнение кривой (42) по этим формулам, придется проделать громоздкую работу по определению такого угла поворота α , чтобы в преобразованном уравнении отсутствовал член, содержащий произведение $x'y'$. Применение матриц дает возможность решить поставленную задачу, не определяя угла поворота α .

Рассмотрим квадратичную форму

$$F = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy,$$

соответствующую кривой второго порядка. Эта квадратичная форма имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Перейдем к новой системе координат, направив новые оси координат по главным направлениям. Тогда квадратичная форма примет канонический вид

$$F = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2,$$

где λ_1 и λ_2 — собственные значения матрицы A , а уравнение (42) преобразуется в уравнение

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + a'_{13}x_1 + a'_{23}y_1 + a_{33} = 0.$$

Дальнейшее упрощение уравнения достигается параллельным переносом.

Пример 1. Определить, какая кривая задается уравнением

$$32x^2 + 52xy - 7y^2 + 180 = 0.$$

Решение. Приведем к каноническому виду квадратичную форму

$$F = 32x^2 + 52xy - 7y^2.$$

Матрица этой квадратичной формы будет

$$A = \begin{pmatrix} 32 & 26 \\ 26 & -7 \end{pmatrix}.$$

Найдем собственные значения матрицы A , для чего составим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 32 - \lambda & 26 \\ 26 & -7 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad \lambda^2 - 25\lambda - 900 = 0,$$

откуда $\lambda_1 = 45$ и $\lambda_2 = -20$. Запишем канонический вид квадратичной формы

$$F = 45x_1^2 - 20y_1^2.$$

В новой системе координат уравнение кривой будет

$$45x_1^2 - 20y_1^2 + 180 = 0$$

или

$$\frac{y_1^2}{9} - \frac{x_1^2}{4} = 1.$$

Как видим, данное уравнение определяет гиперболу.

Пример 2. Привести к каноническому виду уравнение кривой

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 - 32 = 0.$$

Решение. Найдем характеристические числа квадратичной формы

$$F = 5x^2 - 6xy + 5y^2.$$

Составим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 5 - \lambda & -3 \\ -3 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad \lambda^2 - 10\lambda + 16 = 0.$$

Тогда $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = 8$ — характеристические числа.

Следовательно, данное уравнение кривой приводится к виду

$$2x_1^2 + 8y_1^2 - 32 = 0$$

или

$$\frac{x_1^2}{16} + \frac{y_1^2}{4} = 1.$$

Итак, данное уравнение определяет эллипс с полуосями $a=4$, $b=2$.

Пример 3. Привести к каноническому виду уравнение линии

$$3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0$$

и построить ее.

Решение. Запишем матрицу A квадратичной формы

$$F = 3x^2 + 10xy + 3y^2:$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Из характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda & 5 \\ 5 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

найдем собственные значения матрицы A : $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = -2$. Квадратичная форма F примет канонический вид

$$F = 8x_1^2 - 2y_1^2.$$

Главные направления ее найдем из системы

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda) x_1 + a_{12} x_2 = 0, \\ a_{12} x_1 + (a_{22} - \lambda) x_2 = 0. \end{cases}$$

Пусть $\{l_1, m_1\}$ — собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = 8$. Тогда

$$\begin{cases} -5l_1 + 5m_1 = 0, \\ 5l_1 - 5m_1 = 0, \end{cases}$$

откуда $l_1 = 1$, $m_1 = 1$.

Единичным вектором этого главного направления будет вектор

$$i' \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}.$$

Другое главное направление будет перпендикулярно к вектору i' .

Повернем оси координат так, чтобы направления новых осей были главными. Тогда координаты вектора i' соответственно — значения косинуса и синуса угла поворота α . Такой поворот определяется формулами преобразования координат

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} y_1, \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_1. \end{cases} \quad (43)$$

По формулам (43) имеем

$$-2x - 14y = -2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 \right) - 14 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 \right) =$$

$$= -\frac{16}{\sqrt{2}}x_1 - \frac{12}{\sqrt{2}}y_1,$$

и, следовательно, исходное уравнение примет вид

$$8x_1^2 - 2y_1^2 - \frac{16}{\sqrt{2}}x_1 - \frac{12}{\sqrt{2}}y_1 - 13 = 0.$$

Преобразуем полученное уравнение путем выделения полных квадратов:

$$8\left(x_1^2 - \frac{2}{\sqrt{2}}x_1\right) - 2\left(y_1^2 + \frac{6}{\sqrt{2}}y_1\right) = 13,$$

$$8\left(x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 2\left(y_1 + \frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 = 13 + 8 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{9}{2},$$

$$8\left(x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 2\left(y_1 + \frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 = 8,$$

$$\left(x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{\left(y_1 + \frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2}{4} = 1.$$

Совершая параллельный перенос по формулам

$$\left. \begin{aligned} X &= x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ Y &= y_1 + \frac{3}{\sqrt{2}}, \end{aligned} \right\}$$

получим уравнение гиперболы

$$X^2 - \frac{Y^2}{4} = 1.$$

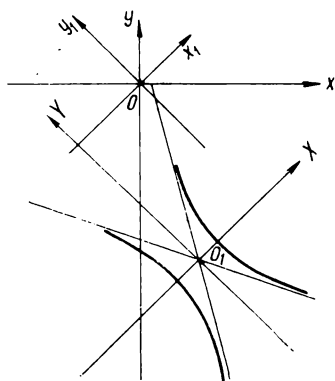


Рис. 1

Построим ее. Система координат Ox_1y_1 получается из системы Oxy поворотом на угол $\alpha = 45^\circ$. Система $O_1X'Y'$ получается параллельным переносом системы Ox_1y_1 так, что новое начало O_1 имеет в системе Ox_1y_1 координаты $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$.

Построив систему координат $O_1X'Y'$, вычерчиваем кривую (рис. 1).

§ 15. Приведение к каноническому виду уравнений поверхностей второго порядка

В прямоугольной системе координат поверхность второго порядка представляется уравнением вида

$$\begin{aligned} a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + \\ + 2a_{23}yz + a_{14}x + a_{24}y + a_{34}z + a_{44} = 0. \end{aligned} \quad (44)$$

Направив оси координат по главным направлениям квадратичной формы

$$F = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz,$$

приведем ее к каноническому виду

$$F = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + \lambda_3 z_1^2,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — характеристические числа квадратичной формы.

В новой системе координат уравнение (44) примет вид

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + \lambda_3 z_1^2 + a'_{14}x_1 + a'_{24}y_1 + a'_{34}z_1 + a_{44} = 0. \quad (45)$$

Дальнейшее упрощение уравнения (44) производится с помощью параллельного переноса.

Пример 1. Привести к каноническому виду уравнение поверхности

$$4x^2 + 4y^2 + z^2 + 12xy - 20 = 0. \quad (46)$$

Решение. Квадратичная форма

$$F = 4x^2 + 4y^2 + z^2 + 12xy$$

имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Составим характеристическое уравнение этой матрицы

$$\begin{vmatrix} 4 - \lambda & 6 & 0 \\ 6 & 4 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

или

$$(\lambda^2 - 8\lambda - 20)(1 - \lambda) = 0,$$

откуда

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 10, \lambda_3 = -2.$$

Таким образом, уравнение (46) приводится к виду

$$x_1^2 + 10y_1^2 - 2z_1^2 = 20$$

или

$$\frac{x_1^2}{20} + \frac{y_1^2}{2} - \frac{z_1^2}{10} = 1,$$

а это, как известно, уравнение однополостного гиперболоида.

Если уравнение поверхности второго порядка содержит члены первого измерения, то задача значительно усложняется, ибо в этом случае нужно найти формулы, выражающие старые координаты через новые, чтобы затем преобразовать к новым координатам и члены первого измерения. На рассмотрении задач такого рода мы не останавливаемся.

Теория поля

При изучении многих явлений, встречающихся в природе и технике, нас часто интересует не только характер изменения переменных величин, участвующих в описании этих явлений, но и характер изменения первых и вторых производных этих величин, а также некоторых комбинаций производных. Знание свойств этих производных или их комбинаций позволяет получить более полное математическое описание изучаемого явления и характера процессов, протекающих при этом. Так как каждая переменная величина может изменяться в некоторой области (ограниченной или неограниченной), то изучение характеристик, связанных с изменением данной величины, мы также должны проводить в этой области. Так мы приходим к понятию поля.

§ 1. Скалярное поле

Полем называется пространство (или часть его), в каждой точке которого задана некоторая величина. Если эта величина есть скаляр, то поле называется *скалярным*, а если вектор, то *векторным*. Примером скалярного поля может служить поле температур внутри некоторого нагретого тела, поле давлений в некотором объеме, поле плотности массы и др. Примером векторного поля является поле скоростей, силовое поле и др. Часто в одной и той же части пространства могут иметь место одновременно скалярное и векторное поля. Например, в атмосфере можно одновременно рассматривать поле температур и поле скоростей воздуха и т. д.

Скалярное поле считается заданным, если в каждой точке пространства определена скалярная функция $u(x, y, z)$. В дальнейшем будем предполагать эту функцию непрерывной в рассматриваемой области вместе с частными производными первого порядка по всем переменным.

Рассмотрим все точки скалярного поля $u(x, y, z)$, в которых данная функция принимает постоянное значение $u(x, y, z) = c$. Геометрическое место таких точек заполняет некоторую поверхность, которая называется *поверхностью уровня*. Часто функцию $u(x, y, z)$, задающую скалярное поле, называют *потенциалом*, а поверхности уровня, соответствующие этой функции (при различных значениях c), — *эквипотенциальными поверхностями*.

Если поле задано не в пространственной, а в плоской области, то оно описывается функцией двух переменных $u(x, y)$. Равенство $u(x, y) = c$ при различных фиксированных c определяет, вообще говоря, различные кривые. Такие кривые называются *линиями уровня* плоского скалярного поля. С помощью линий уровня на топографических картах обозначают рельеф

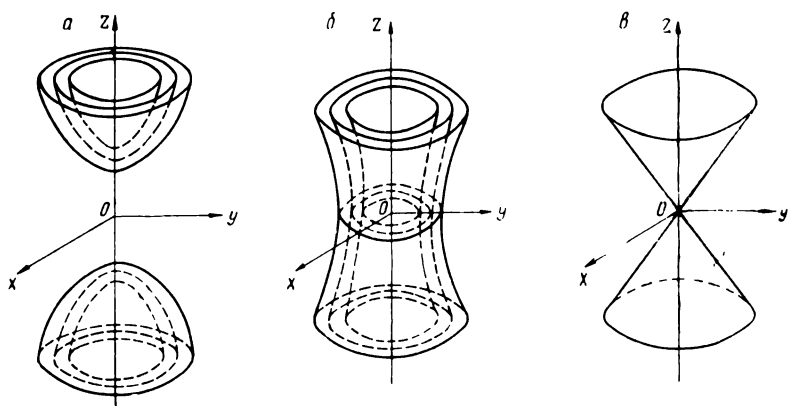


Рис. 2

местности; они соединяют точки, имеющие одинаковую высоту над уровнем моря, и называются *горизонталями*. С помощью линий уровня на специальных картах изображают распределение атмосферных осадков, температур, давлений и т. д.

Пример 1. Найти поверхности уровня функции $u = x^2 + y^2 - z^2$.

Решение. Приравняем значение функции к постоянному:

$$x^2 + y^2 - z^2 = c.$$

При $c < 0$ поверхностями уровня (рис. 2, а) является семейство двуполостных гиперболоидов; при $c > 0$ — семейство однополостных гиперболоидов (рис. 2, б); при $c = 0$ — круговой конус с вершиной в начале координат (рис. 2, в).

Пример 2. Найти линии уровня функции $z = \frac{1}{x^2 + y^2}$, изображенной на рис. 3.

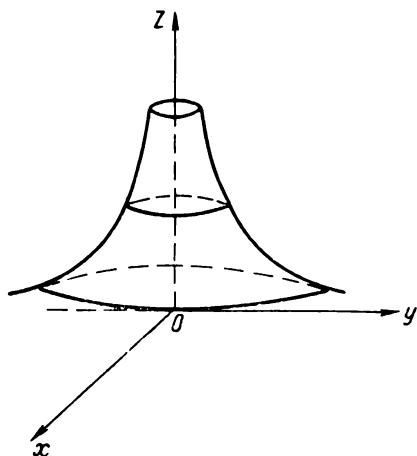


Рис. 3

Решение. Придавая z постоянное значение c' , получим $\frac{1}{x^2 + y^2} = c'$. Положив $\frac{1}{c'} = c^2$, будем иметь $x^2 + y^2 = c^2$, т. е. линиями уровня при различных значениях c являются окружности.

§ 2. Производная по направлению

Для изучения скалярного поля важно знать скорость изменения функции $u(x, y, z)$, задающей это поле, при переходе от одной точки пространства к другой. С этой целью возьмем фиксированную точку M и какую-нибудь переменную точку M_1 (рис. 4). Отрезок MM_1 будет считаться направленным, при этом направление берется со знаком плюс, если оно совпадает с направлением прямой l , и со знаком минус, если они противоположны.

Если существует предел отношения

$$\lim_{M_1 \rightarrow M} \frac{u(M_1) - u(M)}{MM_1},$$

то этот предел называется *производной* функции $u(M)$ по направлению l в точке M и обозначается

$$\frac{\partial u(M)}{\partial l} = \lim_{M_1 \rightarrow M} \frac{u(M_1) - u(M)}{MM_1}.$$

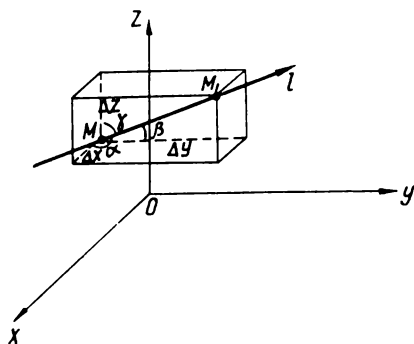


Рис. 4

Если для функции одной независимой переменной $y = f(x)$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

показывает скорость изменения ординаты по абсциссе в точке с координатой x , то производная по направлению характеризует быстроту изменения функции $u(M)$ в точке $M(x, y, z)$ в направлении l .

Покажем, что производная по любому направлению выражается через производные по трем взаимно перпендикулярным направлениям x, y, z по формуле

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma, \quad (1)$$

где $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ — направляющие косинусы луча l . Для этого обозначим расстояние MM_1 через t . Так как функция

$u(x, y, z)$ по предположению дифференцируема (имеет непрерывные частные производные первого порядка), то ее полное приращение можно записать

$$\begin{aligned}\Delta u &= u(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - u(x, y, z) = \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \Delta z + \varepsilon,\end{aligned}$$

где ε — бесконечно малая более высокого порядка, чем t . Выразим $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ через t и направляющие косинусы направления l :

$$\Delta x = t \cos \alpha, \quad \Delta y = t \cos \beta, \quad \Delta z = t \cos \gamma.$$

Запишем разность

$$\begin{aligned}u(M_1) - u(M) &= u(x + t \cos \alpha, y + t \cos \beta, z + t \cos \gamma) - u(x, y, z) = \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} t \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} t \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} t \cos \gamma + \varepsilon.\end{aligned}\quad (2)$$

Разделим все члены равенства (2) на t :

$$\frac{u(M_1) - u(M)}{t} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma + \frac{\varepsilon}{t}$$

и перейдем к пределу при $t \rightarrow 0$. При этом $\frac{\varepsilon}{t}$ стремится к нулю, когда

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(M_1) - u(M)}{t} = \frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma. \quad (3)$$

Как видно из (3), производная $\frac{\partial u}{\partial l}$ зависит как от частных производных $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ в точке M , так и от направления луча l .

Пример 1. Найти производную функции $w = xyz$ в точке $A(5, 1, 2)$ в направлении, идущем от этой точки к точке $B(9, 4, 14)$.

Решение. Примем направление AB за l , тогда

$$\frac{\partial w}{\partial l} = \frac{\partial w}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial w}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial w}{\partial z} \cos \gamma, \quad (*)$$

где $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ — направляющие косинусы прямой l .

Найдем координаты вектора $\overrightarrow{AB} \{a_x, a_y, a_z\}$ и направляющие косинусы:

$$a_x = 9 - 5 = 4, \quad a_y = 4 - 1 = 3, \quad a_z = 14 - 2 = 12;$$

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} = \frac{4}{\sqrt{4^2 + 3^2 + 12^2}} = \frac{4}{13},$$

$$\cos \beta = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} = \frac{3}{13}, \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} = \frac{12}{13}.$$

Найдем частные производные функции ω в точке A :

$$\left. \frac{\partial \omega}{\partial x} \right|_A = yz|_A = 2; \quad \left. \frac{\partial \omega}{\partial y} \right|_A = xz|_A = 10, \quad \left. \frac{\partial \omega}{\partial z} \right|_A = xy|_A = 5,$$

Полученные значения подставим в формулу (*)

$$\frac{\partial \omega}{\partial l} = 2 \cdot \frac{4}{13} + 10 \cdot \frac{3}{13} + 5 \cdot \frac{12}{13} = \frac{98}{13}.$$

Пример 2. Найти производную функции $z = \ln(x + y)$ в точке $(1, 2)$, принадлежащей параболы $y^2 = 4x$, по направлению этой параболы.

Решение. За направление кривой в данной точке принимают направление касательной в этой точке. Установим направление параболы в точке $(1, 2)$.

Найдем направляющие косинусы касательной:

$$2yy' = 4, \quad y' = \frac{2}{y}, \quad \operatorname{tg} \alpha = y'|_{x=1} = 1;$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos \beta = \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{\substack{x=1 \\ y=2}} = \frac{1}{x+y} \Big|_{\substack{x=1 \\ y=2}} = \frac{1}{3},$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{\substack{x=1 \\ y=2}} = \frac{1}{x+y} \Big|_{\substack{x=1 \\ y=2}} = \frac{1}{3}.$$

Полученные значения подставим в формулу производной (3):

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \cos \beta,$$

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Пример 3. Найти скорость изменения скалярного поля, заданного функцией $u = 5x^2yz - 7xy^2z + 5xyz^2$ в направлении вектора $\mathbf{a} = 8\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$ в точке $M(1, 1, 1)$.

Решение. Найдем частные производные функции u в точке M :

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_M = (10xyz - 7y^2z + 5yz^2)_M = 8,$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_M = (5x^2z - 14xyz + 5xz^2)_M = -4,$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_M = (5x^2y - 7xy^2 + 10xyz)_M = 8$$

и направляющие косинусы

$$\cos \alpha = \frac{8}{\sqrt{64+16+64}} = \frac{2}{3}, \quad \cos \beta = \frac{-4}{\sqrt{144}} = -\frac{1}{3},$$

$$\cos \gamma = \frac{8}{\sqrt{144}} = \frac{2}{3}.$$

Скорость изменения функции (производная по направлению)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial l} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma = \\ &= 8 \cdot \frac{2}{3} + (-4) \left(-\frac{1}{3}\right) + 8 \cdot \frac{2}{3} = 12. \end{aligned}$$

§ 3. Градиент

Можно поставить вопрос, по какому направлению возрастание функции $u(M)$ в данной точке будет наибольшим? Этот вопрос имеет смысл в том случае, если производные

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = b, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = c$$

не равны нулю одновременно (иначе производная по любому направлению была бы нулем).

Преобразуем правую часть равенства (3):

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} \cos \alpha + \frac{du}{dy} \cos \beta + \frac{du}{dz} \cos \gamma &= a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma = \\ &= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \cos \alpha + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \cos \beta + \right. \\ &\quad \left. + \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \cos \gamma \right). \end{aligned}$$

Выражения

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \quad \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \quad \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

можно рассматривать как направляющие косинусы некоторого вектора $\mathbf{g} \{a, b, c\}$, т. е.

$$\begin{aligned} \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} &= \cos \lambda, \quad \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \cos \mu, \\ \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} &= \cos \nu \end{aligned} \tag{4}$$

($\cos^2 \lambda + \cos^2 \mu + \cos^2 \nu = 1$), и тогда получим

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} (\cos \lambda \cos \alpha + \cos \mu \cos \beta + \cos \nu \cos \gamma).$$

Обозначив через $(\widehat{\mathbf{g} \mathbf{l}})$ угол между направлениями \mathbf{g} и \mathbf{l} и воспользовавшись формулой скалярного произведения в координатах, запишем

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cos(\widehat{\mathbf{g} \mathbf{l}}). \quad (5)$$

Эта производная имеет наибольшее значение, если направления \mathbf{g} и \mathbf{l} совпадают, т. е.

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial g} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}. \quad (6)$$

Вектор \mathbf{g} , проекции которого на оси координат определяются равенствами (4), указывает направление наиболее быстрого возрастания функции, а его длина дает величину соответствующей производной. Этот вектор называют градиентом функции $u(x, y, z)$ и обозначают

$$\mathbf{g} = \text{grad } u(x, y, z). \quad (7)$$

Определение. Градиентом функции $u(M) = u(x, y, z)$ называется вектор, отнесенный к точке M , координатами которого являются значения частных производных этой функции, т. е.

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k}. \quad (8)$$

Проекции градиента, а следовательно, и он сам зависят от координат точки.

Введя понятие градиента скалярного поля, равенству (5) можно придать вид

$$\frac{\partial u}{\partial l} = |\mathbf{g}| \cos(\widehat{\mathbf{g} \mathbf{l}}), \quad (9)$$

т. е. производная по направлению равна проекции градиента функции на это направление.

Обозначив единичный вектор направления луча \mathbf{l} через \mathbf{l}° , производную по направлению (2) можно записать и так:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = (\text{grad } u \cdot \mathbf{l}^\circ), \quad (10)$$

т. е. производная функция по данному направлению равна скалярному произведению градиента функции на единичный вектор этого направления. Из равенства (10) непосредственно вытекает выведенное нами условие направления наибольшего возрастания функции. Действительно, $\frac{\partial u}{\partial l}$ принимает наибольшее значение, если вектор $\text{grad } u$ и единичный вектор \mathbf{l}° параллельны и одинаково направлены.

Проведем через точку M_0 (рис. 5) поверхность уровня $u = c$ и покажем, что вектор $\text{grad } u(M_0)$ направлен по нормали к поверхности. Действительно, уравнение нормали в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ запишется

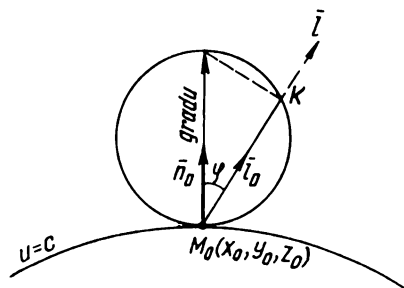


Рис. 5

$$\begin{aligned} \frac{x - x_0}{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M_0}} &= \frac{y - y_0}{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{M_0}} = \\ &= \frac{z - z_0}{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{M_0}}. \end{aligned}$$

Из приведенного уравнения следует, что нормаль к поверхности, имеющая проекции на оси координат $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M_0}$, $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{M_0}$

и $\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{M_0}$, совпадает с градиентом функции $u(x, y, z)$ в точке M_0 , что и доказывает наше утверждение.

Рис. 5 дает наглядное представление производной по направлению как проекции $\text{grad } u$ на это направление. Для этого выражение (10) запишем в виде

$$\frac{\partial u}{\partial l} = |\text{grad } u| \cos \varphi,$$

где φ — угол между $\text{grad } u$ и направлением луча l . В точке M_0 к поверхности уровня $u = c$ восстановим перпендикуляр и отложим на нем вектор $\text{grad } u$. На этом векторе, как на диаметре, построим сферу. Из точки M_0 проводим вектор l и обозначаем точку пересечения его с поверхностью сферы через K . Тогда из рисунка видно, что

$$M_0K = \frac{\partial u}{\partial l} = |\text{grad } u| \cos \varphi.$$

Если обозначить единичный вектор нормали через n° , а производную функции по направлению этой нормали через $\frac{\partial u}{\partial n}$, то, очевидно, будет иметь место равенство

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial n} n^\circ.$$

Из определения градиента легко получить следующие его свойства, доказательства которых предлагаем вывести читателю.

1. $\text{grad}(u + c) = \text{grad } u$ ($c = \text{const}$).
2. $\text{grad } cu = c \text{ grad } u$.

$$3. \operatorname{grad}(u_1 + u_2) = \operatorname{grad} u_1 + \operatorname{grad} u_2.$$

$$4. \operatorname{grad}(uv) = u \operatorname{grad} v + v \operatorname{grad} u.$$

$$5. \operatorname{grad} u^2 = 2u \operatorname{grad} u.$$

$$6. \operatorname{grad} \frac{u}{v} = \frac{1}{v^2} (v \operatorname{grad} u - u \operatorname{grad} v).$$

$$7. \operatorname{grad} F(u) = F'(u) \operatorname{grad} u.$$

Пример 1. Найти величину и направление градиента скалярного поля $u = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$ в точке $M_0(1, -1, 2)$. Определить, в каких точках градиент перпендикулярен к оси x , в каких точках он равен нулю.

Решение. Находим частные производные в точке M_0 :

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{M_0} = (2x - 2yz)_{M_0} = 6, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{M_0} = (2y - 2xz)_{M_0} = -6,$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{M_0} = (2z - 2xy)_{M_0} = 6.$$

$$\operatorname{grad} u(M_0) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{M_0} \mathbf{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{M_0} \mathbf{j} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_{M_0} \mathbf{k} = 6\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 6\mathbf{k}.$$

Величина градиента

$$|\operatorname{grad} u| = \sqrt{6^2 + (-6)^2 + 6^2} = 6\sqrt{3}.$$

Градиент функции u в произвольной точке M

$$\operatorname{grad} u(M) = 2(x - yz) \mathbf{i} + 2(y - xz) \mathbf{j} + 2(z - xy) \mathbf{k}.$$

Вектор, перпендикулярный к оси x , имеет равную нулю первую координату, поэтому

$$2(x - yz) = 0.$$

Следовательно, для всех точек M , лежащих на поверхности $x = yz$, $\operatorname{grad} u$ будет перпендикулярен к оси x . Градиент равен нулю, если

$$x - yz = 0, \quad y - xz = 0, \quad z - xy = 0.$$

Решая эту систему, находим искомые точки

$$M_1(0, 0, 0), \quad M_2(-1, 1, -1), \quad M_3(1, -1, -1),$$

$$M_4(-1, -1, 1), \quad M_5(1, 1, 1).$$

Пример 2. Найти градиент потенциала электростатического поля $\varphi = \frac{q}{r}$ (q — электрический заряд, r — расстояние точки от начала координат, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$).

Решение.

$$\operatorname{grad} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \mathbf{k},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{qx}{r^3}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{qy}{r^3}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{qz}{r^3};$$

$$\operatorname{grad} \varphi = -\frac{q}{r^3} (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = -\frac{q}{r^3} \mathbf{r}.$$

Физический смысл полученного результата состоит в том, что градиент потенциала электростатического поля равен напряженности поля.

Пример 3. Найти $\text{grad}(\mathbf{r}, \mathbf{a})$, где $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, \mathbf{a} — постоянный вектор: $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$.

Решение.

$$\begin{aligned}(\mathbf{r} \mathbf{a}) &= xa_x + ya_y + za_z, \\ \frac{\partial}{\partial x}(xa_x) &= a_x, \quad \frac{\partial}{\partial y}(ya_y) = a_y, \\ \frac{\partial}{\partial z}(za_z) &= a_z.\end{aligned}$$

Тогда

$$\text{grad}(\mathbf{r} \mathbf{a}) = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}.$$

Из этого равенства видно, что $\text{grad}(\mathbf{r} \mathbf{a})$ во всех точках поля сохраняет одинаковое направление, совпадающее с направлением вектора \mathbf{a} . Для скалярного произведения $(\mathbf{r} \mathbf{a})$ поверхностями уровня будут плоскости, перпендикулярные к вектору \mathbf{a} , т. е.

$$a_x x + a_y y + a_z z = c.$$

Пример 4. Найти наибольшую крутизну поверхности $z = x^y$ в точке $A(2, 2, 4)$.

Решение. Найдём частные производные в точке A :

$$\begin{aligned}\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_A &= (yx^{y-1})_A = 4, \\ \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_A &= (x^y \ln x)_A = 4 \ln 2; \\ \text{grad } z(A) &= 4\mathbf{i} + 4 \ln 2 \mathbf{j}.\end{aligned}$$

Направляющие косинусы градиента

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{4}{\sqrt{4^2 + (4 \ln 2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \ln^2 2}}; \\ \cos \beta &= \frac{4 \ln 2}{\sqrt{4^2 + (4 \ln 2)^2}} = \frac{\ln 2}{\sqrt{1 + \ln^2 2}}.\end{aligned}$$

Обозначим угол наиболее крутого подъема поверхности z в точке A (в направлении $\text{grad } z$) через φ , тогда быстрота изменения функции в этом направлении или, что то же, $\text{tg } \varphi$ определится из соотношения

$$\begin{aligned}\text{tg } \varphi &= \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_A \cos \alpha + \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_A \cos \beta = 4 \frac{1}{\sqrt{1 + \ln^2 2}} + \\ &+ 4 \ln 2 \frac{\ln 2}{\sqrt{1 + \ln^2 2}};\end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = 4\sqrt{1 + \ln^2 2} \approx 4,87;$$

$$\varphi = 78^\circ 24'.$$

§ 4. Векторное поле

Как указывалось в § 1 настоящей главы, векторным полем называется часть пространства, в каждой точке M которого определен некоторый вектор $\mathbf{a} = \mathbf{a}(M)$.

Если обозначить проекции вектора $\mathbf{a}(M)$ на оси координат через a_x, a_y, a_z , а координаты точки M через x, y, z , то вектор $\mathbf{a}(M)$ и его проекции будут функциями координат точки, т. е. $\mathbf{a} = \mathbf{a}(x, y, z)$ или

$$\mathbf{a} = a_x(x, y, z)\mathbf{i} + a_y(x, y, z)\mathbf{j} + a_z(x, y, z)\mathbf{k}.$$

В дальнейшем будем предполагать, что проекции a_x, a_y и a_z — однозначные непрерывные функции координат точки, имеющие непрерывные частные производные первого порядка. Это значит, что в каждой точке поля имеется только один вектор, изменяющийся непрерывно при переходе от точки к точке.

Графически векторное поле изображается векторными (силовыми) линиями (рис. 6.)

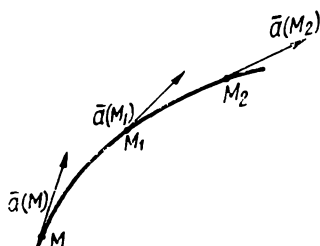


Рис. 6

Определение. Векторной линией поля называется такая кривая, в каждой точке которой касательная совпадает с направлением вектора, приложенного в этой точке.

В качестве примера векторных линий могут служить линии тока жидкости, т. е. линии, по которым движутся частицы жидкости. В электростатическом поле векторными линиями являются его силовые линии и т. д.

Составим уравнения векторных линий. Если $\mathbf{r}\{x, y, z\}$ — радиус-вектор какой-нибудь векторной линии, то вектор

$$d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$$

направлен по касательной к этой линии. По определению векторных линий вектор $\mathbf{a}(M)$ также направлен по касательной. Следовательно, векторы $\mathbf{a}\{a_x, a_y, a_z\}$ и $d\mathbf{r}\{dx, dy, dz\}$ коллинеарны. В таком случае их проекции пропорциональны, т. е.

$$\frac{dx}{a_x} = \frac{dy}{a_y} = \frac{dz}{a_z}. \quad (11)$$

Мы получили систему дифференциальных уравнений векторных линий.

Иногда рассматривают поверхности, составленные из векторных линий; их называют *векторными поверхностями*. Они характеризуются тем, что в каждой точке M такой поверхности соответствующий вектор $\mathbf{a}(M)$ лежит в касательной плоскости к поверхности. Если взять замкнутый контур и провести через все точки этого контура векторные линии, то образуется поверхность, называемая *векторной трубкой* (рис. 7).

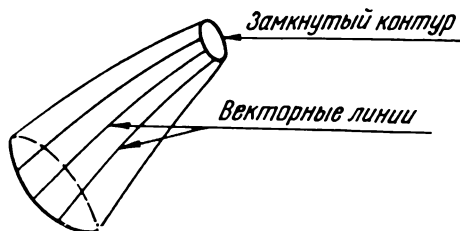


Рис. 7

Пример 1. Найти векторные линии поля

$$\mathbf{a}(M) = (y + z)\mathbf{i} - x\mathbf{j} - x\mathbf{k}$$

Решение. Уравнения векторных линий получим из системы уравнений

$$\frac{dx}{y + z} = -\frac{dy}{x} = -\frac{dz}{x}$$

или

$$\left. \begin{aligned} xdy &= xdz, \\ xdx &= -(y + z)dy. \end{aligned} \right\}$$

Из первого уравнения системы следует $dy = dz$; интегрируя его, находим $y - z = c$. Используя равенство $dy = dz$, второе уравнение системы запишем

$$xdx + ydy + zdz = 0.$$

Решением его будет

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad (R = \text{const}).$$

Следовательно, уравнениями векторных линий являются линии пересечения концентрических сфер и семейства параллельных плоскостей, т. е. окружности

$$\left. \begin{aligned} y - z &= c, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= R^2. \end{aligned} \right\}$$

Пример 2. Найти векторные линии поля

$$\mathbf{a}(M) = (z - y)\mathbf{i} + (x - z)\mathbf{j} + (y - x)\mathbf{k}.$$

Решение. Здесь $a_x = z - y$, $a_y = x - z$, $a_z = y - x$. Уравнения векторных линий:

$$\frac{dx}{z - y} = \frac{dy}{x - z} = \frac{dz}{y - x}.$$

Система распадается на два уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dz} &= \frac{z-y}{y-x}, \\ \frac{dy}{dz} &= \frac{x-z}{y-x}. \end{aligned} \right\} \quad (*)$$

Сложим правые и левые части (*)

$$\frac{dx}{dz} + \frac{dy}{dz} = \frac{z-y+x-z}{y-x} = -1$$

или

$$dx + dy + dz = 0,$$

откуда

$$x + y + z = c.$$

Затем первое уравнение (*) умножим на x , второе — на y и сложим

$$\frac{xdx}{dz} + \frac{ydy}{dz} = \frac{(z-y)x}{y-x} + \frac{(x-z)y}{y-x},$$

$$\frac{xdx}{dz} + \frac{ydy}{dz} = -z,$$

$$xdx + ydy + zdz = 0,$$

откуда

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Итак, решениями нашей системы являются окружности, образованные пересечением сфер с центром в начале координат и плоскостей:

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= R^2, \\ x + y + z &= c. \end{aligned} \right\}$$

Пример 3. Определить векторные линии магнитного поля, образованного электрическим током, сила которого I , текущим по бесконечно длинному прямолинейному проводу.

Решение. Если принять провод за ось z , то вектор напряженности искомого магнитного поля \mathbf{H} выражается формулой (вывод опускаем)

$$\mathbf{H} = \frac{2I}{r^2} (-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}),$$

где r — расстояние от точки M до провода. В нашем случае

$$a_x = -\frac{2Iy}{r^2}, \quad a_y = \frac{2Ix}{r^2}, \quad a_z = 0.$$

Уравнениями векторных линий будут

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{0}.$$

Система распадается на два уравнения

$$dz = 0, \quad z = C \quad \text{и} \quad \frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x}.$$

Решая последнее уравнение $xdx + ydy = 0$, находим

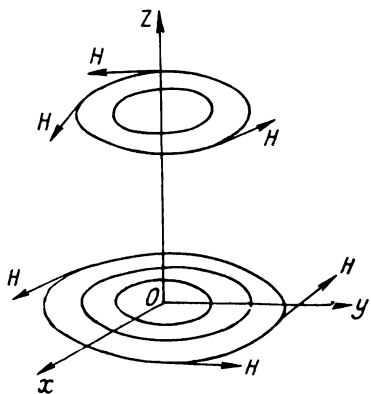
$$x^2 + y^2 = R^2$$

$$(R = \text{const}).$$

Итак, уравнения векторных линий магнитного поля суть

$$z = c \quad \text{и} \quad x^2 + y^2 = R^2.$$

Это будут окружности с центром на оси z , лежащие в плоскостях, перпендикулярных этой оси (рис. 8).



Р и с. 8

§ 5. Поток вектора через поверхность

Пусть в пространстве, в котором задано векторное поле, определена поверхность σ , а вектор $\mathbf{a}(M)$, задающий это поле, определяет поле скоростей текущей жидкости. Считая движение установившимся, т. е. не изменяющимся со временем, рассмотрим точку M на поверхности. Вычислим количество жидкости, протекающее через поверхность σ за единицу времени. Если принять площадку $\Delta\sigma$, окружающую точку M (рис. 9), достаточно малой, то ее можно считать плоской, а вектор $\mathbf{a}(M)$ и единичный вектор нормали \mathbf{n} — постоянными. Количество жидкости, протекающей через площадку $\Delta\sigma$, приблизительно можно принять равным объему цилиндра, изображенного на рис. 9:

$$\Delta Q \approx a_n \Delta\sigma = (\mathbf{a}\mathbf{n}) \Delta\sigma.$$

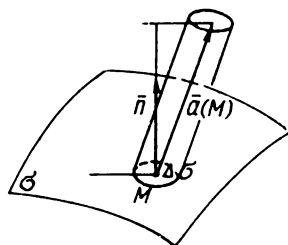
Переходя к пределу, когда диаметр площадки $\Delta\sigma \rightarrow 0$, получим

$$\frac{dQ}{d\sigma} = \lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta\sigma} = (\mathbf{a}\mathbf{n}),$$

откуда

$$dQ = (\mathbf{a}\mathbf{n}) d\sigma.$$

Количество жидкости, протекающей



Р и с. 9

через всю поверхность, определится интегралом по поверхности

$$Q = \iint_{\sigma} (\mathbf{a}\mathbf{n}) d\sigma.$$

Теперь отвлечемся от конкретного вида поля. Рассмотрим векторное поле, образованное вектором $\mathbf{a}(M) = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$, и в этом поле некоторую поверхность σ , в каждой точке которой определено положительное направление нормали \mathbf{n} . Обозначим площадку, окружающую точку M , через $\Delta\sigma$ (см. рис. 9).

Потоком вектора $\mathbf{a}(M)$ через поверхность σ называется интеграл по поверхности

$$Q = \iint_{\sigma} (\mathbf{a}\mathbf{n}) d\sigma = \iint_{\sigma} a_n d\sigma, \quad (12)$$

где a_n — проекция вектора $\mathbf{a}(M)$ на внешнюю нормаль к поверхности σ .

Поток вектора — скаляр. При перемене ориентации поверхности σ меняет знак и поток вектора, так как при этом изменяется знак нормали \mathbf{n} .

Выразим единичный вектор нормали \mathbf{n} через его проекции

$$\mathbf{n} = \cos(\widehat{n, x}) \mathbf{i} + \cos(\widehat{n, y}) \mathbf{j} + \cos(\widehat{n, z}) \mathbf{k},$$

где $(\widehat{n, x})$, $(\widehat{n, y})$, $(\widehat{n, z})$ — углы, составленные нормалью и соответствующими осями координат.

Подставим в интеграл (12) выражение векторов $\mathbf{a}(M)$ и \mathbf{n} через их проекции, получим поток в системе декартовых координат

$$Q = \iint_{\sigma} (\mathbf{a}\mathbf{n}) d\sigma = \iint_{\sigma} [a_x \cos(\widehat{n, x}) + a_y \cos(\widehat{n, y}) + a_z \cos(\widehat{n, z})] d\sigma. \quad (13)$$

Используя равенства, известные из анализа *,

$$\left. \begin{aligned} d\sigma \cos(\widehat{n, x}) &= dydz, \\ d\sigma \cos(\widehat{n, y}) &= dxdz, \\ d\sigma \cos(\widehat{n, z}) &= dxdy, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

* Н. С. П и с к у н о в. Дифференциальное и интегральное исчисления. М., 1962, стр. 664.

где $dydz$, $dx dz$, $dx dy$ — проекции площадки $d\sigma$ на соответствующие координатные плоскости, поток вектора можно записать и в таком виде:

$$Q = \iiint_V [a_x dydz + a_y dx dz + a_z dx dy]. \quad (15)$$

Наибольший интерес представляет тот случай, когда поверхность σ замкнута и ограничивает некоторый объем V . Тогда за направление вектора \mathbf{n} берут направление внешней нормали.

В случае, если вектор \mathbf{a} (M) является скоростью жидкости, то величина потока Q , вычисленная для замкнутой поверхности, дает разность между жидкостью, вытекающей из данного объема и поступающей в него. Если $Q = 0$, то это означает, что количество втекающей и количество вытекающей жидкости из объема, ограниченного поверхностью σ , одинаковы. Когда $Q > 0$, то жидкости вытекает больше, чем втекает. Это обстоятельство указывает на то, что в данном объеме V существуют источники (места, где жидкость возникает). Отрицательный поток ($Q < 0$) указывает на то, что в объеме имеются стоки (жидкость исчезает).

Рассмотрим, как практически определяются значения вектора нормали \mathbf{n} .

Пусть поверхность σ задана уравнением

$$z = f(x, y).$$

Направляющие косинусы нормали для этой поверхности выражаются формулами

$$\begin{aligned} \cos(\widehat{n, x}) &= \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}, \\ \cos(\widehat{n, y}) &= \frac{-\frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}, \\ \cos(\widehat{n, z}) &= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}, \end{aligned}$$

тогда единичный вектор нормали определится формулой

$$\mathbf{n} = \pm \frac{-\frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}. \quad (16)$$

Знак плюс отвечает острому углу, составленному нормалью и осью z , и соответствует выбору верхней стороны поверхности; знак минус — тупому углу, составленному нормалью и осью z , и соответствует выбору нижней стороны поверхности.

Если поверхность σ задана уравнением

$$F(M) = F(x, y, z) = 0,$$

то градиент функции $F(M)$ направлен по нормали к поверхности $F(M)$ в точке M и единичный вектор нормали можно записать

$$\mathbf{n} = \pm \frac{\text{grad } F(M)}{|\text{grad } F(M)|} = \pm \frac{\frac{\partial F}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial F}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial F}{\partial z} \mathbf{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}, \quad (17)$$

причем знак перед дробью должен быть таким, чтобы получить вектор \mathbf{n} на выбранной стороне поверхности.

Может оказаться, что поверхность состоит из нескольких частей, тогда вектор нормали \mathbf{n} вычисляется для каждой части отдельно, а знак определяется заданием одной из сторон всей составной поверхности.

Пример 1. В некоторой точке пространства находится электрический положительный заряд q , создающий в окружающей его однородной среде векторное поле, так что в каждой точке пространства определяется вектор \mathbf{F} . По закону Кулона

$$\mathbf{F} + k \frac{q}{r^2} \mathbf{r}^0,$$

где r — расстояние рассматриваемой точки от начала координат, \mathbf{r}^0 — единичный вектор, направленный по радиус-вектору данной точки (рис. 10), k — постоянный коэффициент (диэлектрическая постоянная). Определить поток, выходящий из сферы радиуса R .

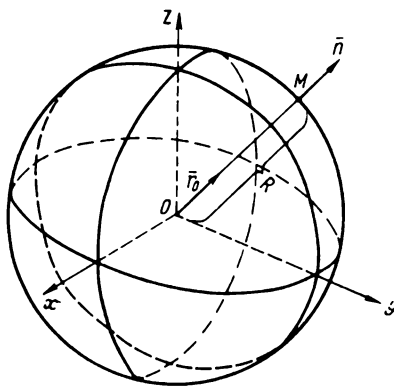


Рис. 10

Решение. В точке M сферы элемент потока равен $k \frac{q d\sigma}{R^2}$.

Так как $k \frac{q}{R^2}$ постоянно для всей сферы, то весь выходящий из сферы поток равен

$$\iint_{\sigma} \frac{kq}{R^2} (\mathbf{r}^0 \mathbf{n}) d\sigma = \frac{kq}{R^2} \iint (\mathbf{r}^0 \mathbf{n}) d\sigma.$$

Но $(\mathbf{r}^0 \mathbf{n}) = 1$ (скалярное произведение единичных коллинеарных векторов), поэтому

$$\frac{kq}{R^2} \iint_{\sigma} d\sigma = \frac{kq}{R^2} \sigma = \frac{kq}{R^2} 4\pi R^2 = 4\pi kq.$$

Пример 2. Вычислить поток векторного поля

$$\mathbf{a} = (x - 2z)\mathbf{i} + (3z - 4x)\mathbf{j} + (5x + y)\mathbf{k}$$

через внешнюю сторону поверхности пирамиды с вершинами $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $O(0, 0, 0)$ и $S(0, 0, 1)$ (рис. 11).

Решение. Поверхность состоит из четырех плоских треугольников: SAB , BOS , SOA , OAB . Поток через всю поверхность

$$Q = \iint_{\Delta SAB} (\mathbf{a}\mathbf{n}) d\sigma + \iint_{\Delta BOS} (\mathbf{a}\mathbf{n}) d\sigma + \iint_{\Delta SOA} (\mathbf{a}\mathbf{n}) d\sigma + \iint_{\Delta OAB} (\mathbf{a}\mathbf{n}) d\sigma.$$

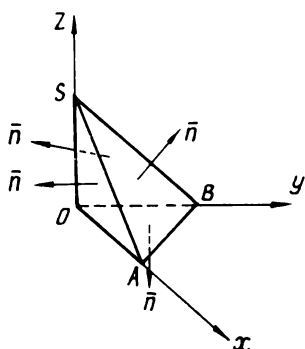


Рис. 11

Рассмотрим каждый интеграл в отдельности.

1) Напишем уравнение плоскости треугольника ASB

$$\begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Итак, уравнение плоскости треугольника ASB

$$x + y + z - 1 = 0. \quad (18)$$

Принимая

$$F(x, y, z) = x + y + z - 1,$$

найдем единичный вектор нормали к этой плоскости по формуле (17)

$$\mathbf{n} = \frac{\text{grad } F}{|\text{grad } F|} = \frac{\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{3}}.$$

Здесь $\cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{z}}) = \frac{1}{\sqrt{3}} > 0$, что соответствует внешней поверхности пирамиды.

Определение потока сводится к вычислению двойного интеграла по области D_{xy} , лежащей в плоскости xy ,

$$Q_1 = \iint_{\sigma} (\mathbf{a}\mathbf{n}) d\sigma = \iint_{D_{xy}} \frac{(\mathbf{a}\mathbf{n})}{|\cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{z}})|} \Big|_{z=z(x,y)} dx dy, \quad (19)$$

где под знаком интеграла вместо z нужно подставить выражение, взятое из (18),

$$\frac{(an)}{|\cos(\widehat{n, z})|} = \frac{1}{\sqrt{3}} [(x - 2z) + (3z - 4x) + (5x + y)] \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = 2x + y + z.$$

Из уравнения плоскости ASB (18) находим

$$z = 1 - x - y.$$

Тогда

$$\frac{(an)}{|\cos(\widehat{n, z})|} \Big|_{z=z(x, y)} = 2x + y + (1 - x - y) = x + 1.$$

Возвращаясь к (19), получим

$$\begin{aligned} Q_1 &= \iint_{D_{xy}} \frac{(an)}{|\cos(\widehat{n, z})|} \Big|_{z=z(x, y)} dx dy = \iint_{D_{xy}} (x + 1) dx dy = \\ &= \int_0^1 (x + 1) dx \int_0^{1-x} dy = \int_0^1 (1 - x^2) dx = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

2) Треугольник BOS лежит в плоскости yz , уравнение которой $x = 0$. Вектором нормали будет $\mathbf{n} = -\mathbf{i}$. Здесь

$$\begin{aligned} \cos(\widehat{n, x}) &= \cos 180^\circ = -1; \\ \frac{(an)}{|\cos(\widehat{n, x})|} \Big|_{x=0} &= \frac{-(x - 2z)}{|-1|} \Big|_{x=0} = 2z; \\ Q_2 &= \iint_{\Delta BOS} (an) d\sigma = \iint_{\Delta BOS} \frac{(an)}{|\cos(\widehat{n, x})|} \Big|_{x=0} dy dz = \iint_{\Delta BOS} 2z dy dz. \end{aligned}$$

Интегрируя сначала по y , а затем по z , найдем

$$Q_2 = 2 \int_0^1 z dz \int_0^{1-z} dy = 2 \int_0^1 z (1 - z) dz = \frac{1}{3}.$$

3) Треугольник SOA лежит в плоскости xz , уравнение его плоскости $y = 0$. Внешний вектор нормали $\mathbf{n} = -\mathbf{j}$,

$$\begin{aligned} \cos(\widehat{n, y}) &= -1; \\ \frac{(an)}{|\cos(\widehat{n, y})|} \Big|_{y=0} &= \frac{-(3z - 4x)}{|-1|} = 4x - 3z; \\ Q_3 &= \iint_{\Delta SOA} (an) d\sigma = \iint_{\Delta SOA} (4x - 3z) dx dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (4x - 3z) dz = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

4) Треугольник OAB лежит в плоскости xy , уравнение его плоскости $z_1 = 0$. Вектором нормали будет $\mathbf{n} = -\mathbf{k}$,

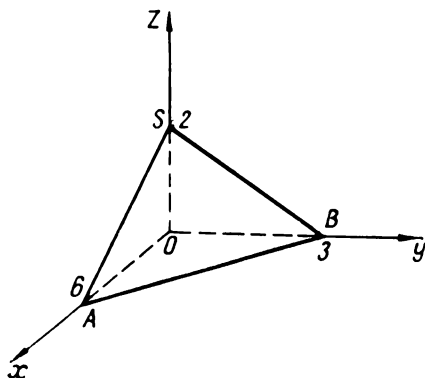
$$\cos(\widehat{\mathbf{n}, z}) = -1;$$

$$\frac{(\mathbf{an})}{|\cos(\widehat{\mathbf{n}, z})|} \Big|_{z=0} = \frac{-(5x+y)}{|-1|} = -5x - y;$$

$$Q_4 = \iint_{\Delta OAB} (\mathbf{an}) d\sigma = \iint_{\Delta OAB} -\frac{(\mathbf{an})}{|\cos(\widehat{\mathbf{n}, z})|} dx dy = - \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (5x+y) dy = 1.$$

Поток через всю поверхность составит

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = 2 - \frac{1}{6}.$$



Р и с. 12

Пример 3. Найти поток векторного поля $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - x\mathbf{j} + 5z\mathbf{k}$ через верхнюю сторону поверхности треугольника ASB , полученного при пересечении плоскости $x + 2y + 3z - 6 = 0$ с координатными плоскостями (рис. 12).

Решение. В нашем случае

$$F(x, y, z) = x + 2y + 3z - 6 = 0. \quad (20)$$

Уравнение (20) однозначно разрешимо относительно каждой из переменных.

Поток векторного поля может быть вычислен по формуле (15). Спроектируем вектор \mathbf{a} на три координатные плоскости, причем знак перед каждым слагаемым в (15) возьмем таким,

каков знак $\cos(\widehat{\mathbf{n}, x})$, $\cos(\widehat{\mathbf{n}, y})$, $\cos(\widehat{\mathbf{n}, z})$ на поверхности σ (см. формулу 13).

Решая уравнение (20) относительно каждой из переменных, получим

$$\left. \begin{aligned} x &= -(2y + 3z) + 6, & a_x[x(y, z), y, z] &= 2, \\ y &= -\frac{x + 3z}{2} + 3, & a_y[x, y(x, z), z] &= -x, \\ z &= -\frac{x + 2y}{3} + 2, & a_z[x, y, z(x, y)] &= 5z = \\ & & &= 5\left(-\frac{x + 2y}{3} + 2\right) = \frac{-5(x + 2y)}{3} + 10. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Нетрудно видеть, что внешняя нормаль к плоскости треугольника ABS составляет острые углы с осями координат, поэтому в формуле (15) $dydz$, $dx dz$, $dx dy$ — положительные. С учетом (20) будем иметь

$$\begin{aligned} Q &= \iint_{D_{yz}} 2y dz - \iint_{D_{zx}} x dx dz + \iint_{D_{xy}} \left[-\frac{5(x+2y)}{3} + 10 \right] dx dy = \\ &= 2 \int_0^2 dz \int_0^{3-\frac{3}{2}z} dy - \int_0^2 dz \int_0^{6-3z} x dx - \frac{1}{3} \int_0^3 dy \int_0^{6-2y} (5x + 10y - 30) dx = \\ &= 6 - 12 + 30 = 24. \end{aligned}$$

Решение задач на вычисление потока вектора через замкнутую поверхность значительно упрощается (см. § 5), если воспользоваться формулой Остроградского*, известной из теории кратных интегралов, осуществляющей преобразование интеграла по замкнутой поверхности в интеграл по объему, ограниченному этой поверхностью:

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} [P \cos(\widehat{n, x}) + Q \cos(\widehat{n, y}) + R \cos(\widehat{n, z})] d\sigma = \\ = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV. \end{aligned}$$

§ 6. Дивергенция

Как указывалось в предыдущем параграфе, поток вектора в одних случаях может быть положительным, в других отрицательным. Будем рассматривать векторное поле как поле текущей жидкости. Тогда, если поток отрицательный, то внутри выделенного объема имеется сток (отрицательный источник). Однако в одном и том же объеме может быть несколько источников и стоков, и, следовательно, суммарное значение потока зависит от мощности каждого из них, где под мощностью источника понимается количество жидкости, вытекающей или втекающей в рассматриваемый объем в единицу времени. Если, например, поток равен нулю, то в данном объеме либо нет ни источников, ни стоков, либо мощности их равны и взаимно компенсируются.

В связи с этим для характеристики потока векторного поля вводится понятие плотности источника. Рассмотрим векторное

* М. В. Остроградский (1801—1861) — выдающийся русский математик и механик.

поле $\mathbf{a}(M)$. Пусть в этом поле некоторый малый объем ΔV , ограниченный замкнутой поверхностью σ , содержит точку M . Вычислим поток вектора через поверхность σ и возьмем отношение этого потока к объему ΔV . Выражение

$$\frac{1}{\Delta V} \iint_{\sigma} (\mathbf{a}\mathbf{n}) d\sigma$$

можно рассматривать как среднюю плотность источника в объеме ΔV , приходящуюся на единицу объема.

Переходя к пределу, когда объем ΔV стягивается в точку, получим плотность источника в данной точке, которая называется *дивергенцией* (расходимостью) вектора \mathbf{a} и обозначается

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \lim_{\Delta V \rightarrow M} \frac{\iint_{\sigma} (\mathbf{a}\mathbf{n}) d\sigma}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \rightarrow M} \frac{\iint_{\sigma} a_n d\sigma}{\Delta V}. \quad (22)$$

Из формулы (22) следует, что $\operatorname{div} \mathbf{a}$ не зависит (инвариантна) от выбора системы координат. Дивергенция векторного поля — скалярная величина. Вычисление ее по формуле (22) неудобно, и на практике обычно пользуются координатной формой.

По формуле Остроградского в декартовой системе координат * поток вектора \mathbf{a} можно представить в виде

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} \mathbf{a}\mathbf{n} d\sigma &= \iint_{\sigma} (a_x dydz + a_y dx dz + a_z dx dy) = \\ &= \iiint_V \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) dx dy dz. \end{aligned} \quad (23)$$

По теореме о среднем значении

$$\iint_{\sigma} \mathbf{a}\mathbf{n} d\sigma = \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right)_{M_1} V,$$

откуда

$$\frac{\iint_{\sigma} \mathbf{a}\mathbf{n} d\sigma}{V} = \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right)_{M_1}.$$

Если область V стягивается к точке M , то $M_1 \rightarrow M$, и в пределе получим

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \quad (24)$$

* Определение дивергенции и других характеристик векторного и скалярного полей в криволинейных координатах мы опускаем. Интересующихся этим вопросом отсылаем к книге Б. М. Будака, С. В. Фомина. Кратные интегралы и ряды. М., 1965.

Последнее равенство позволяет формулу Остроградского (23) записать в векторной форме

$$\iint_{\sigma} \mathbf{a}_n d\sigma = \iiint_V (\mathbf{a} \mathbf{n}) d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{a} \cdot dV, \quad (25)$$

т. е. поток вектора \mathbf{a} через замкнутую поверхность σ равен тройному интегралу от дивергенции по области, ограниченной этой поверхностью.

Заметим, что формула Остроградского (25) справедлива, если проекции вектора \mathbf{a} на координатные оси и их первые производные непрерывны во всех точках области V .

Отметим три свойства дивергенции, облегчающих на практике ее вычисление.

$$1. \operatorname{div} (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \operatorname{div} \mathbf{a} + \operatorname{div} \mathbf{b}.$$

$$2. \operatorname{div} (\varphi \mathbf{a}) = \varphi \operatorname{div} \mathbf{a} + (\mathbf{a} \operatorname{grad} \varphi),$$

где $\varphi = \varphi(x, y, z)$ — скалярная функция.

Действительно,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} (\varphi \mathbf{a}) &= \frac{\partial}{\partial x} (\varphi a_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\varphi a_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\varphi a_z) = \varphi \frac{\partial a_x}{\partial x} + a_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \\ &+ \varphi \frac{\partial a_y}{\partial y} + a_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \varphi \frac{\partial a_z}{\partial z} + a_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \varphi \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) + \\ &+ \left(a_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + a_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + a_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

Выражение в последних скобках есть скалярное произведение векторов \mathbf{a} и $\operatorname{grad} \varphi$, поэтому

$$\operatorname{div} (\varphi \mathbf{a}) = \varphi \operatorname{div} \mathbf{a} + (\mathbf{a} \operatorname{grad} \varphi).$$

$$3. \operatorname{div} (c \varphi) = (c \operatorname{grad} \varphi),$$

где c — постоянный вектор.

$$\begin{aligned} \operatorname{div} (c \varphi) &= \frac{\partial}{\partial x} (c_x \varphi) + \frac{\partial}{\partial y} (c_y \varphi) + \frac{\partial}{\partial z} (c_z \varphi) = \\ &= c_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + c_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + c_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} = (c \operatorname{grad} \varphi). \end{aligned}$$

Правая часть последнего равенства есть скалярное произведение вектора c и градиента функции φ .

Векторные поля, у которых во всех точках $\operatorname{div} \mathbf{a} = 0$, не имеют источников и называются *соленоидальными* или *трубчатыми*. Название «трубчатый» обусловлено тем, что в соленоидальном поле векторные линии нигде не начинаются и не кончаются, они могут уходить в бесконечность, быть замкнутыми или иметь начало и конец у границ поля. Примерами таких полей являются: напряженность магнитного поля, создаваемого электрическим током, текущим по бесконечно длинному прямолинейному проводу; поле линейных скоростей

жидкости, вращающейся вокруг какой-нибудь оси, и др. Векторные линии таких полей — замкнутые кривые (окружности).

Для соленоидального поля поток вектора \mathbf{a} (M) через любое поперечное сечение векторной трубки имеет одну и ту же величину. В самом деле, возьмем векторную трубку (рис. 13) и проведем в ней два сечения, обозначив их через σ_1 и σ_2 . Рассмотрим замкнутую поверхность трубки, заключенную между сечениями. Обозначая через V объем, лежащий внутри поверхности σ ($\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_{\text{бок}}$), применим формулу Остроградского (25)

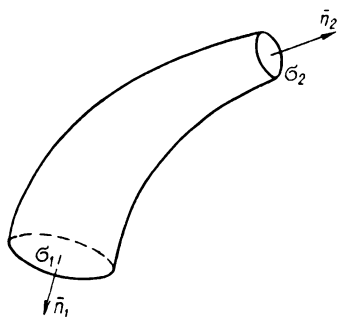


Рис. 13

$$\iiint_{\sigma} \mathbf{a}_n d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{a} dV.$$

Но по условию $\operatorname{div} \mathbf{a} = 0$, следовательно,

$$\iiint_{\sigma} \mathbf{a}_n d\sigma = 0$$

или, что то же самое,

$$\iint_{\sigma_1} \mathbf{a}_n d\sigma + \iint_{\sigma_2} \mathbf{a}_n d\sigma + \iint_{\sigma_{\text{бок}}} \mathbf{a}_n d\sigma = 0.$$

На боковой поверхности векторной трубки $\mathbf{a}_n = 0$, так как вектор \mathbf{a} (M) направлен по касательной в любой точке поверхности. На поверхностях σ_1 и σ_2 направления внешних нормалей противоположны; изменив направление у одной из них, получим, что поток изменит знак и тогда

$$\iint_{\sigma_1} \mathbf{a}_n d\sigma = \iint_{\sigma_2} \mathbf{a}_n d\sigma. \quad (26)$$

Поток вектора \mathbf{a} через поверхность σ можно рассматривать как число векторных линий, пересекающих эту поверхность. Поэтому, обращаясь к равенству (26), можно сказать, что через сечение σ_1 вдоль векторной трубки число векторных линий не меняется, откуда и вытекает, что в соленоидальном поле векторные линии нигде не могут ни начинаться, ни кончаться.

Пример 1. Вычислить дивергенцию поля радиус-вектора \mathbf{r} , где

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Решение.

$$\operatorname{div} \mathbf{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3.$$

Пример 2. Найти дивергенцию поля линейных скоростей,

$$\mathbf{v} = -\omega y\mathbf{i} + \omega x\mathbf{j}$$

жидкости, вращающейся вокруг оси z .

Решение.

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial(-\omega y)}{\partial x} + \frac{\partial(\omega x)}{\partial y} = -\omega \frac{\partial y}{\partial x} + \omega \frac{\partial x}{\partial y} = 0.$$

Пример 3. Вычислить $\operatorname{div} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$, где \mathbf{r} — радиус-вектор.

Решение.

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} &= \operatorname{div} \left(\frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) = \\ &= \frac{2(x^2 + y^2 + z^2)}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3} = \frac{2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} = \frac{2}{|\mathbf{r}|}. \end{aligned}$$

Пример 4. Вычислить поток радиус-вектора через любую замкнутую поверхность.

Решение. Пользуясь формулой Остроградского, найдем:

$$\iint_{\sigma} \mathbf{r}_n d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{r} dV = 3 \iiint_V dV = 3V.$$

Пример 5. Вычислить поток вектора $\mathbf{a} = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$ через границу части шара $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, находящейся в первом октанте.

Решение. Воспользуемся определением дивергенции (24) и формулой Остроградского:

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\partial(xy)}{\partial x} + \frac{\partial(yz)}{\partial y} + \frac{\partial(xz)}{\partial z} = y + z + x,$$

$$Q = \iint_{\sigma} (\mathbf{a}\mathbf{n}) d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{a} dV = \iiint_V (x + y + z) dx dy dz.$$

Перейдем к сферическим координатам (рис. 14)

$$x = r \sin \varphi \cos \theta,$$

$$y = r \sin \varphi \sin \theta,$$

$$z = r \cos \varphi,$$

$$dV = r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta.$$

В нашем случае

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2},$$

$$0 \leq r \leq 1.$$

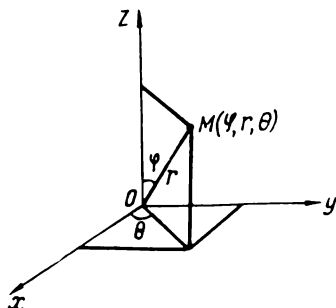


Рис. 14

$$Q = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} \sin \varphi d\varphi \int_0^1 r^3 [\cos \varphi + \sin \varphi (\sin \theta + \cos \theta)] dr = \frac{3\pi}{16}.$$

Пример 6. Вычислить поток векторного поля

$$\mathbf{a} = (x - 2z)\mathbf{i} + (3z - 4x)\mathbf{j} + (5x + y)\mathbf{k}$$

через внешнюю сторону поверхности пирамиды с вершинами в точках $O(0, 0, 0)$, $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$.

Решение. Довольно громоздкое решение этой задачи дано в примере 2 § 4. Оно значительно упрощается, если воспользоваться формулой Остроградского:

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\partial (x - 2z)}{\partial x} + \frac{\partial (3z - 4x)}{\partial y} + \frac{\partial (5x + y)}{\partial z} = 1,$$

$$Q = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{a} dV = \iiint_V dV = V,$$

где V — объем пирамиды $AOBC$, равный произведению площади основания на треть высоты:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{6}.$$

Следовательно,

$$Q = \frac{1}{6}.$$

Пример 7. С помощью формулы Остроградского вычислить поток векторного поля

$$\mathbf{a} = 2xi - yj + zk$$

через замкнутую поверхность $9 - z = x^2 + y^2$ ($0 \leq z \leq 9$).

Решение.

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{a} &= \frac{\partial}{\partial x} (2x) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} (-y) + \frac{\partial}{\partial z} (z) = 2 - \\ &- 1 + 1 = 2; \end{aligned}$$

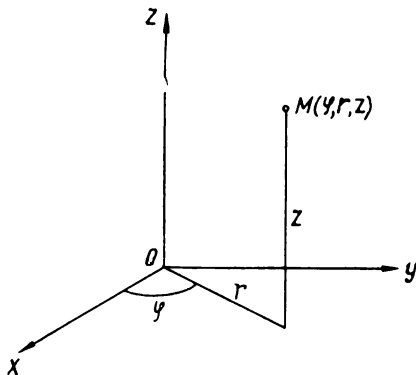


Рис. 15

$$Q = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{a} dV = 2 \iiint_V dV. \quad (27)$$

Поверхность представляет собой часть параболоида вращения, отсеченную плоскостью $z = 0$. Перейдем к цилиндрическим координатам (рис. 15)

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z,$$

где $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq 3$, $0 \leq z \leq 9$. Выражение для элемента объема $dV = r dr d\varphi dz$ подставим в (27)

$$Q = 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^9 dz \int_0^3 r dr = 2\pi \cdot 9 \cdot 9 = 162\pi.$$

Пример 8. С помощью формулы Остроградского найти поток векторного поля

$$\mathbf{a} = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + (z-x)\mathbf{k}$$

через цилиндрическую поверхность $x^2 + y^2 = 4$, ограниченную плоскостями

$$z = 0, \quad x + y + z + 1 = 0.$$

Решение. Найдем

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\partial}{\partial x} (2x) + \frac{\partial}{\partial y} (2y) + \frac{\partial}{\partial z} (z-x) = 5.$$

Перейдем к цилиндрическим координатам

$$x = r \cos \varphi,$$

$$y = r \sin \varphi,$$

$$z = z.$$

Элемент объема

$$dV = r dr d\varphi dz.$$

$$Q = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{a} dV = 5 \iiint_V dV;$$

$$\begin{aligned} Q &= 5 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r dr \int_0^{-(1+r\cos\varphi+r\sin\varphi)} dz = -5 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 (r + r^2 \cos \varphi + r^2 \sin \varphi) dr = \\ &= -5 \int_0^{2\pi} d\varphi \left[\frac{r^2}{2} + \frac{r^3}{3} (\cos \varphi + \sin \varphi) \right]_0^2 = \\ &= -5 \int_0^{2\pi} \left[2 + \frac{8}{3} (\cos \varphi + \sin \varphi) \right] d\varphi = -20\pi. \end{aligned}$$

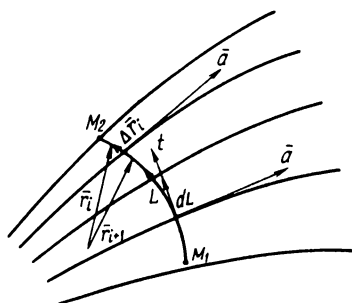
Полученное отрицательное значение $Q = -20\pi$ указывает на наличие в рассматриваемом объеме отрицательного источника.

§ 7. Линейный интеграл и циркуляция

Пусть векторное поле задано вектором $\mathbf{a} \{a_x, a_y, a_z\}$. Возьмем в этом поле некоторую кривую L , соединяющую точки M_1, M_2 , и разобьем ее радиус-векторами \mathbf{r}_i ($i = 1, 2, \dots, n$) на элементарные участки $\Delta \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i$ (рис. 16). Составим теперь сумму скалярных произведений векторов \mathbf{a} и $\Delta \mathbf{r}_i$:

$$\sum_{i=1}^n (\mathbf{a}_i \Delta \mathbf{r}_i).$$

Перейдем к пределу при $n \rightarrow \infty$, считая, что длина наибольшего участка $\Delta \mathbf{r}_i \rightarrow 0$. Полученный предел, если он существует, называется **линейным интегралом вектора \mathbf{a} вдоль кривой L** и обозначается



$$\lim_{\Delta \mathbf{r}_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (\mathbf{a}_i \Delta \mathbf{r}_i) = \int_L (\mathbf{a} d\mathbf{r}), \quad (28)$$

где $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$.

В декартовых координатах

$$\int_L (\mathbf{a} d\mathbf{r}) = \int_L a_x dx + a_y dy + a_z dz. \quad (29)$$

Р и с. 16

Линейный интеграл есть величина скалярная.

Если точка перемещается по кривой L под действием силы \mathbf{a} , проекции которой на оси координат равны a_x, a_y, a_z , то интеграл (29) выражает собой работу, совершенную этой силой. Для векторных полей иной природы этот интеграл имеет, конечно, другой физический смысл.

Линейный интеграл обладает обычными свойствами криволинейных интегралов. Его величина зависит как от кривой L , так и от конечной и начальной точек интегрирования. При изменении направления интегрирования интеграл меняет знак.

Линейный интеграл (29) может быть записан и в другой форме.

Заметим вначале, что если \mathbf{r} — радиус-вектор точки $\mathbf{r}(x, y, z)$, принадлежащей кривой L , то дифференциал его

$$d\mathbf{r} = d(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k} \quad ,$$

и модуль

$$|d\mathbf{r}| = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

С другой стороны, дифференциал дуги кривой dL , как известно, определяется формулой $dL = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$. Таким образом, имеем:

$$|d\mathbf{r}| = dL.$$

Теперь обозначим через a_t проекцию вектора \mathbf{a} на касательную к кривой в направлении обхода, получим $(\mathbf{a} d\mathbf{r}) = a_t dL$, и тогда линейный интеграл

$$\int_L (\mathbf{a} d\mathbf{r}) = \int_L a_t dL. \quad (30)$$

Вычисление линейного интеграла ничем не отличается от вычисления криволинейных интегралов. Уравнение кривой L (контура интегрирования) обычно выражают через какой-нибудь параметр, и тогда вычисление линейного интеграла сводится к вычислению определенного интеграла.

Если кривая L замкнутая, то линейный интеграл называется *циркуляцией* C вектора \mathbf{a} вдоль кривой L и обозначается одним из интегралов:

$$C = \oint_L (\mathbf{a} d\mathbf{r}), \quad (31)$$

$$C = \oint_L a_x dx + a_y dy + a_z dz, \quad (32)$$

$$C = \oint_L \mathbf{a} dL. \quad (33)$$

Пример 1. Найти линейный интеграл вектора

$$\mathbf{a} = x^3 \mathbf{i} - y^3 \mathbf{j}$$

вдоль первой четверти окружности $\mathbf{r} = R \cos t \mathbf{i} + R \sin t \mathbf{j}$.

Решение. На окружности $x = R \cos t$, $y = R \sin t$ и тогда вектор \mathbf{a} запишется $\mathbf{a} = R^3 \cos^3 t \mathbf{i} - R^3 \sin^3 t \mathbf{j}$. Найдем

$$d\mathbf{r} = (-R \sin t \mathbf{i} + R \cos t \mathbf{j}) dt.$$

Скалярное произведение

$$(\mathbf{a} d\mathbf{r}) = (-R^4 \cos^3 t \sin t - R^4 \sin^3 t \cos t) dt = -\frac{1}{2} R^4 \sin 2t dt.$$

За направление обхода примем направление, противоположное вращению часовой стрелки; параметр t будет меняться в пределах от 0 до $\frac{\pi}{2}$:

$$\int_L (\mathbf{a} d\mathbf{r}) = -\frac{1}{2} R^4 \int_0^{\pi/2} \sin 2t dt = -\frac{1}{2} R^4.$$

Пример 2. Вычислить линейный интеграл векторного поля

$$\mathbf{a} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + (x + y - 1) \mathbf{k}$$

вдоль отрезка прямой L от точки $A(1, 1, 1)$ до точки $B(2, 3, 4)$.

Решение. Согласно формуле (29),

$$\int_L a_x dx + a_y dy + a_z dz = \int_{(1, 1, 1)}^{(2, 3, 4)} x dx + y dy + (x + y - 1) dz. \quad (*)$$

Составим уравнение прямой AB :

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}.$$

Из последнего уравнения выразим x и z через y :

$$x = \frac{y}{2} + \frac{1}{2}, \quad z = \frac{3}{2}y - \frac{1}{2}, \quad dx = \frac{dy}{2}, \quad dz = \frac{3}{2}dy.$$

Подставим в (*) и проинтегрируем по y :

$$\begin{aligned} \int_1^3 \left(\frac{y}{2} + \frac{1}{2} \right) \frac{dy}{2} + y dy + \left(\frac{y}{2} + \frac{1}{2} + y - 1 \right) \frac{3}{2} dy = \\ = \frac{1}{2} \int_1^3 (7y - 1) dy = 13. \end{aligned}$$

Пример 3. Вычислить циркуляцию C радиус-вектора вдоль одного витка AB винтовой линии

$$x = a \cos t,$$

$$y = a \sin t,$$

$$z = bt,$$

где A и B — точки, соответствующие значению параметра

$$t_1 = 0, \quad t_2 = 2\pi.$$

Решение.

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

$$dx = -a \sin t \, dt, \quad dy = a \cos t \, dt, \quad dz = b \, dt;$$

$$C = \int_L (\mathbf{r} d\mathbf{r}) = \int_0^{2\pi} (-a^2 \sin t \cos t + a^2 \sin t \cos t + b^2 t) dt = 2\pi^2 b^2.$$

Пример 4. Найти циркуляцию векторного поля

$$\mathbf{a} = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$$

вдоль замкнутого контура, полученного от пересечения сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ координатными плоскостями в первом октанте (рис. 17).

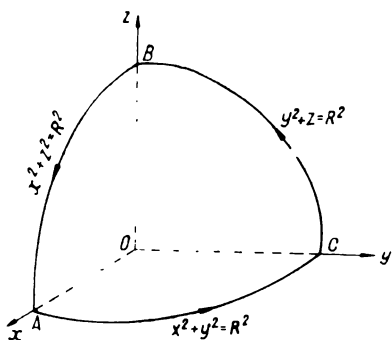


Рис. 17

Решение. Вычислим циркуляцию вдоль линии AB :

$$z = 0, \quad dz = 0,$$

тогда

$$\mathbf{a} = y\mathbf{i} + x\mathbf{k},$$

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j},$$

$$d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}.$$

Скалярное произведение

$$(\mathbf{a} d\mathbf{r}) = ydx.$$

Из уравнения линии AB $x^2 + y^2 = R^2$ найдем $y = \sqrt{R^2 - x^2}$. Переменная x изменяется в пределах от R до 0 . Итак,

$$C = \int_R^0 \sqrt{R^2 - x^2} dx = \left[\frac{R^2}{2} \arcsin \frac{x}{R} + \frac{x}{2} \sqrt{R^2 - x^2} \right]_R^0 = -\frac{\pi R^2}{4}.$$

Легко подсчитать, что значения линейных интегралов вдоль BC и CA будут такими же, как и по контуру AB . Таким образом, циркуляция по замкнутому контуру $ABCA$ равна $-\frac{3\pi R^2}{4}$.

§ 8. Вихрь векторного поля

Рассмотрим поверхность σ , ограниченную замкнутым контуром L . По известной формуле Стокса * (устанавливающей связь между интегралом по поверхности и криволинейным интегралом по границе этой поверхности) циркуляцию вектора \mathbf{a} вдоль этого контура выразим через поверхностный интеграл:

$$\oint_L a_x dx + a_y dy + a_z dz = \iint_{\sigma} \left[\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \cos(\hat{n}, x) + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \cos(\hat{n}, y) + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \cos(\hat{n}, z) \right] d\sigma, \quad (34)$$

где $\cos(\hat{n}, x)$, $\cos(\hat{n}, y)$, $\cos(\hat{n}, z)$ — направляющие косинусы нормали \mathbf{n} к поверхности σ .

Вектор, проекциями которого являются

$$\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y},$$

называется *вихрем* или *ротором* ** векторного поля и обозначается

$$\text{rota} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \mathbf{k}. \quad (35)$$

Этот вектор часто записывается в виде символического определителя

$$\text{rota} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}.$$

* Д. Стокс (1819—1903) — английский физик и математик.

** rotation (англ.) — вращение.

Здесь дифференциальные операции $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ применяются к функциям a_x , a_y , a_z (например, $\frac{\partial}{\partial x} a_x = \frac{\partial a_x}{\partial x}$ и т. д.). Определитель раскрывается по элементам первой строки.

Для плоского поля вихрь вектора $\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j}$ имеет вид

$$\text{rot } \mathbf{a} = \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \mathbf{k}.$$

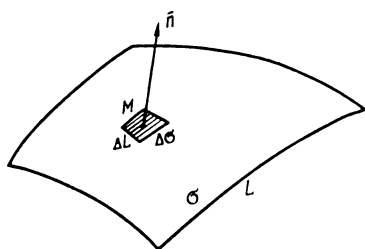


Рис. 18

Пользуясь определением ротора, формулу Стокса можно записать в векторной форме

$$\begin{aligned} \int_L \mathbf{a}_t dL &= \iint_{\sigma} (\mathbf{n} \text{ rot } \mathbf{a}) d\sigma = \\ &= \iint_{\sigma} \text{rot}_n \mathbf{a} d\sigma, \end{aligned} \quad (36)$$

где $\text{rot}_n \mathbf{a}$ — проекция ротора вектора \mathbf{a} на нормаль \mathbf{n} к поверхности σ (рис. 18); обход вдоль контура L совершается против часовой стрелки.

Формулу Стокса можно выразить словами: циркуляция векторного поля \mathbf{a} вдоль замкнутого контура L равна потоку вихря этого поля через поверхность, ограниченную указанным контуром.

Так как вектор $\text{rot } \mathbf{a}$ в общем случае в каждой точке пространства имеет различное значение, то вихрь векторного поля образует новое векторное поле. Векторные линии поля вихрей называются *вихревыми линиями*.

Если в векторном поле всюду $\text{rot } \mathbf{a} = 0$, то такое поле называется *безвихревым* или *потенциальным*.

Формула (36) позволяет определить ротор вне связи с выбором координатных осей. Пусть \mathbf{n} есть некоторое направление, проходящее через точку M поверхности, и $\Delta\sigma$ — элементарная площадка поверхности σ (в силу малости ее можно считать плоской), проходящая через эту точку нормально к \mathbf{n} (рис. 19).

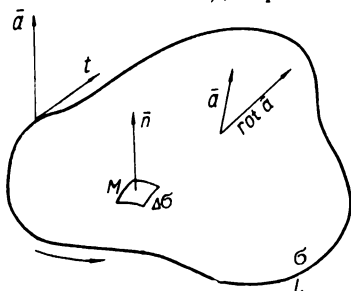


Рис. 19

Применим к этой площадке формулу (36) и воспользуемся теоремой о среднем

$$\int_{\Delta L} \mathbf{a}_t dL = \iint_{\Delta\sigma} \text{rot}_n \mathbf{a} d\sigma = \text{rot}_n \mathbf{a} |_{M_1} \Delta\sigma,$$

откуда

$$\text{rot}_n \mathbf{a} |_{M_1} = \frac{\int \mathbf{a}_t dL}{\Delta\sigma},$$

где ΔL — контур, ограничивающий площадку $\Delta\sigma$, а M_1 — некоторая точка на площадке $\Delta\sigma$. Переходя к пределу, когда контур ΔL стягивается в точку, получим

$$\operatorname{rot}_n \mathbf{a} = \lim_{\Delta L \rightarrow M} \frac{\int_{\Delta L} a_t dL}{\Delta\sigma}. \quad (37)$$

Мы, следовательно, определили проекцию вектора $\operatorname{rot} \mathbf{a}$ на произвольную ось, а значит, и сам вектор, без ссылки на какую-либо предварительно выбранную координатную систему.

Поясним на примере физический смысл ротора. Рассмотрим поле скоростей, создаваемое вектором $\mathbf{a} \{-\omega y, \omega x, 0\}$, где ω — угловая скорость вращения частиц вокруг оси z (рис. 20). Ротор этого векторного поля определим из символического определителя

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} = 2\omega \mathbf{k}.$$

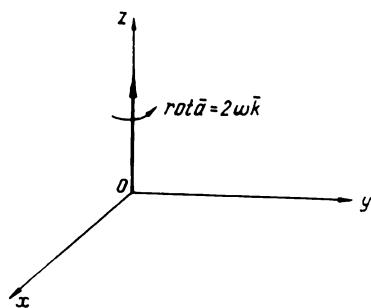


Рис. 20

Как видим, $\operatorname{rot} \mathbf{a}$ направлен по оси z , а по величине равен удвоенному вектору угловой скорости ω . Физически это означает, что каждая частица жидкости участвует в сложном движении: в мгновенном переносном со скоростью $\mathbf{v} \{-\omega y, \omega x, 0\}$ и мгновенном вращательном с постоянной угловой скоростью 2ω . А так как линейные скорости в каждой точке поля различны, то все поле как бы заполнено бесконечно малыми завихрениями, чем и объясняется название «вихрь».

Если поле скоростей создается постоянным вектором \mathbf{a} , то в этом случае $\operatorname{rot} \mathbf{a} = 0$ и завихрения будут отсутствовать. Следовательно, неравенство нулю ротора указывает на наличие в поле скоростей «вращательной компоненты».

Рассмотрим свойства вихря.

1. $\operatorname{rot} \mathbf{c} = 0$, где \mathbf{c} — постоянный вектор.

Свойство легко устанавливается, если раскрыть символический определитель

$$\operatorname{rot} \mathbf{c} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

$$2. \operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{a}) = 0.$$

Действительно, пусть $\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot} \mathbf{a}$, тогда проекции вектора

$$\omega_x = \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}, \quad \omega_y = \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}, \quad \omega_z = \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}.$$

Найдем частные производные

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_x}{\partial x} &= \frac{\partial^2 a_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 a_y}{\partial x \partial z}, & \frac{\partial \omega_y}{\partial y} &= \frac{\partial^2 a_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 a_z}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\partial \omega_z}{\partial z} &= \frac{\partial^2 a_y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 a_x}{\partial y \partial z}. \end{aligned}$$

Складывая правые и левые части, получим

$$\frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \omega_y}{\partial y} + \frac{\partial \omega_z}{\partial z} = 0$$

или

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\omega} = \operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{a}) = 0.$$

Отсюда следует, что вихревое поле является соленоидальным.

$$3. \operatorname{rot}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \operatorname{rot} \mathbf{a} + \operatorname{rot} \mathbf{b}.$$

В самом деле, пусть

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k},$$

тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{a} + \mathbf{b} &= (a_x + b_x) \mathbf{i} + (a_y + b_y) \mathbf{j} + (a_z + b_z) \mathbf{k}. \\ \operatorname{rot}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= \left[\frac{\partial (a_z + b_z)}{\partial y} - \frac{\partial (a_y + b_y)}{\partial z} \right] \mathbf{i} + \left[\frac{\partial (a_x + b_x)}{\partial z} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial (a_z + b_z)}{\partial x} \right] \mathbf{j} + \left[\frac{\partial (a_y + b_y)}{\partial x} - \frac{\partial (a_x + b_x)}{\partial y} \right] \mathbf{k} = \\ &= \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial b_z}{\partial y} - \frac{\partial b_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \\ &+ \left(\frac{\partial b_x}{\partial z} - \frac{\partial b_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} + \left(\frac{\partial b_y}{\partial x} - \frac{\partial b_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} = \\ &= \operatorname{rot} \mathbf{a} + \operatorname{rot} \mathbf{b}. \end{aligned}$$

$$4. \operatorname{rot}(\varphi \mathbf{a}) = \varphi \operatorname{rot} \mathbf{a} + [\operatorname{grad} \varphi, \mathbf{a}]. \quad (*)$$

Здесь $\varphi = \varphi(x, y, z)$ — скалярная функция.

Напишем проекцию $\operatorname{rot}(\varphi \mathbf{a})$ на ось x

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}_x(\varphi \mathbf{a}) &= \frac{\partial}{\partial y}(\varphi a_z) - \frac{\partial}{\partial z}(\varphi a_y) = \varphi \frac{\partial a_z}{\partial y} + a_z \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \\ &- \varphi \frac{\partial a_y}{\partial z} - a_y \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \varphi \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) + a_z \frac{\partial \varphi}{\partial y} - a_y \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \\ &= \varphi \operatorname{rot}_x \mathbf{a} + [\operatorname{grad} \varphi, \mathbf{a}]_x. \end{aligned}$$

Итак,

$$\operatorname{rot}_x(\varphi \mathbf{a}) = \varphi \operatorname{rot}_x \mathbf{a} + [\operatorname{grad} \varphi \mathbf{a}]_x.$$

Аналогично

$$\operatorname{rot}_y(\varphi \mathbf{a}) = \varphi \operatorname{rot}_y \mathbf{a} + [\operatorname{grad} \varphi \mathbf{a}]_y,$$

$$\operatorname{rot}_z(\varphi \mathbf{a}) = \varphi \operatorname{rot}_z \mathbf{a} + [\operatorname{grad} \varphi \mathbf{a}]_z.$$

Умножая последние три равенства соответственно на орты \mathbf{i} , \mathbf{j} и \mathbf{k} и складывая их, получим (*).

$$5. \operatorname{div} [\mathbf{a} \mathbf{b}] = (\mathbf{b} \operatorname{rot} \mathbf{a}) - (\mathbf{a} \operatorname{rot} \mathbf{b}).$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} [\mathbf{a} \mathbf{b}] &= \frac{\partial}{\partial x} [\mathbf{a} \mathbf{b}]_x + \frac{\partial}{\partial y} [\mathbf{a} \mathbf{b}]_y + \frac{\partial}{\partial z} [\mathbf{a} \mathbf{b}]_z = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (a_y b_z - a_z b_y) + \frac{\partial}{\partial y} (a_z b_x - a_x b_z) + \frac{\partial}{\partial z} (a_x b_y - a_y b_x) = \\ &= b_x \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) + b_y \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) + b_z \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) - \\ &- a_x \left(\frac{\partial b_z}{\partial y} - \frac{\partial b_y}{\partial z} \right) - a_y \left(\frac{\partial b_x}{\partial z} - \frac{\partial b_z}{\partial x} \right) - a_z \left(\frac{\partial b_y}{\partial x} - \frac{\partial b_x}{\partial y} \right) = \\ &= (\mathbf{b} \operatorname{rot} \mathbf{a}) - (\mathbf{a} \operatorname{rot} \mathbf{b}). \end{aligned}$$

Пример 1. Найти $\operatorname{rot}(\mathbf{r} \mathbf{a})$, где \mathbf{a} — постоянный вектор и $|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Решение. Запишем символический определитель для $\operatorname{rot}(\mathbf{r} \mathbf{a})$.

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\mathbf{r} \mathbf{a}) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} & a_y \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} & a_z \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \end{vmatrix} = \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial y} (a_z \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) - \frac{\partial}{\partial z} (a_y \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \right] \mathbf{i} - \\ &- \left[\frac{\partial}{\partial x} (a_z \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) - \frac{\partial}{\partial z} (a_x \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \right] \mathbf{j} + \\ &+ \left[\frac{\partial}{\partial x} (a_y \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) - \frac{\partial}{\partial y} (a_x \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \right] \mathbf{k} = \\ &= \frac{1}{|\mathbf{r}|} [(a_y z - a_z y) \mathbf{i} - (a_z x - a_x z) \mathbf{j} + (a_x y - a_y x) \mathbf{k}] = \frac{[\mathbf{r} \mathbf{a}]}{|\mathbf{r}|}. \end{aligned}$$

Пример 2. Найти $\operatorname{rot}[\mathbf{a} \mathbf{r}]$, где \mathbf{a} — постоянный вектор и $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

Решение.

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} [\mathbf{ar}] &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ za_y - ya_z & xa_z - za_x & ya_x - xa_y \end{vmatrix} = \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial y} (ya_x - xa_y) - \frac{\partial}{\partial z} (xa_z - za_x) \right] \mathbf{i} - \left[\frac{\partial}{\partial x} (ya_x - xa_y) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial z} (za_y - ya_z) \right] \mathbf{j} + \left[\frac{\partial}{\partial x} (xa_z - za_x) - \frac{\partial}{\partial y} (za_y - ya_z) \right] \mathbf{k} = 2\mathbf{a}. \end{aligned}$$

Пример 3. Найти поток вихря поля вектора

$$\mathbf{a} = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$$

через поверхность параболоида вращения $z = 2(1 - x^2 - y^2)$, отсеченную плоскостью $z = 0$ (рис. 21).

Решение. По формуле Стокса

$$\iint_{\sigma} \operatorname{rot}_n \mathbf{a} d\sigma = \int_L a_x dx + a_y dy + a_z dz = \int_L y dx + z dy + x dz.$$

Но на контуре L $z = 0$ и $dz = 0$. Следовательно,

$$\iint_{\sigma} \operatorname{rot}_n \mathbf{a} d\sigma = \int_L y dx.$$

Перейдем к полярным координатам

$$\begin{aligned} x &= \cos \varphi, \quad y = \sin \varphi, \\ dx &= -\sin \varphi d\varphi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} \operatorname{rot}_n \mathbf{a} d\sigma &= \int_L y dx = \\ &= - \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi = -\pi. \end{aligned}$$

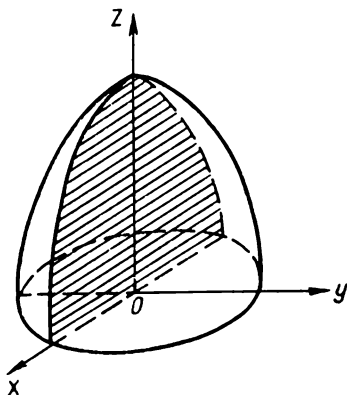


Рис. 21

Пример 4. Пусть $\mathbf{a} = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$. Найти вихрь векторного поля

$$\frac{\mathbf{a}}{r} = \frac{y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Решение. Положив $\frac{1}{r} = \varphi$, найдем $\operatorname{rot} (\varphi \mathbf{a})$ по свойству 4.

Так как

$$\operatorname{grad} \varphi = \frac{1}{r^2} \operatorname{grad} r = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{r} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3},$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} = -\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k},$$

то

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\varphi \mathbf{a}) &= \varphi \operatorname{rot} \mathbf{a} + [\operatorname{grad} \varphi, \mathbf{a}] = -\frac{\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}}{r} + \\ &+ \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\frac{x}{r^3} & -\frac{y}{r^3} & -\frac{z}{r^3} \\ y & z & x \end{vmatrix} = -\frac{1}{r}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) - \frac{1}{r^3}[(xy - z^2)\mathbf{i} + \\ &+ (zy - x^2)\mathbf{j} + (xz - y^2)\mathbf{k}] = -\frac{1}{r^3}[(x^2 + y^2 + xy)\mathbf{i} + \\ &+ (y^2 + z^2 + zy)\mathbf{j} + (x^2 + z^2 + xz)\mathbf{k}]. \end{aligned}$$

Пример 5. Найти циркуляцию векторного поля

$$\mathbf{a} = y^2 \mathbf{i} - x^2 \mathbf{j} + z^2 \mathbf{k}$$

по контуру $ABCA$ (рис. 22), получаемому при пересечении параболоида $x^2 + z^2 = 1 - y$ координатными плоскостями.

Решение. Часто циркуляцию S векторного поля удобно находить с помощью определения ротора (по формуле Стокса, записанной в векторной форме).

Определим единичный вектор нормали к этой поверхности по формуле

$$\mathbf{n} = \frac{\operatorname{grad} F}{|\operatorname{grad} F|},$$

где

$$F = x^2 + y + z^2 - 1.$$

Получим

$$\mathbf{n} = \frac{2x\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2z\mathbf{k}}{\sqrt{4x^2 + 1 + 4z^2}}.$$

Отсюда

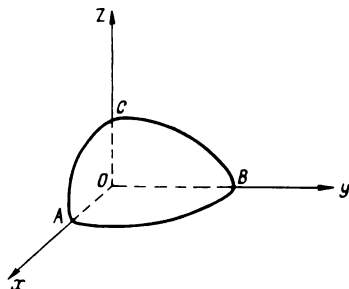


Рис. 22

$$\cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{z}}) = \frac{2z}{\sqrt{4x^2 + 1 + 4z^2}} \geq 0, \quad z \geq 0,$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 - x^2 & z^2 & \end{vmatrix} = -2(x + y)\mathbf{k}.$$

По формуле Стокса циркуляция

$$C = \iint_{\sigma} (\operatorname{rot} \mathbf{a} \mathbf{n}) d\sigma = \iint_{\sigma} \frac{(\operatorname{rot} \mathbf{a} \mathbf{n})}{|\cos(\widehat{\mathbf{n}}, \mathbf{z})|} \Big|_{z=z(x,y)} dx dy.$$

Но

$$\frac{(\operatorname{rot} \mathbf{a} \mathbf{n})}{|\cos(\widehat{\mathbf{n}}, \mathbf{z})|} = -2(x+y),$$

поэтому

$$C = -2 \iint_{D_{xy}} (x+y) dx dy = -2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x+y) dy = -\frac{41}{30}.$$

Пример 6. Найти (по формуле Стокса) циркуляцию векторного поля

$$\mathbf{a} = (z^2 - x^2)\mathbf{i} + (x^2 - y^2)\mathbf{j} + (y^2 - z^2)\mathbf{k}$$

по контуру

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 4, \\ x^2 + y^2 &= z^2. \end{aligned} \right\}$$

Решение. Контуром интегрирования L будет окружность $x^2 + y^2 = 2$, $z = \sqrt{2}$, полученная от пересечения сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ и конуса $x^2 + y^2 = z^2$.

Определим

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z^2 - x^2 & x^2 - y^2 & y^2 - z^2 \end{vmatrix} = 2y\mathbf{i} + 2z\mathbf{j} + 2x\mathbf{k}.$$

За нормаль \mathbf{n} примем единичный вектор \mathbf{k} , направленный по оси z , т. е. $\mathbf{n} = \mathbf{k}$. Тогда

$$\iint_{\sigma} (\operatorname{rot} \mathbf{a} \mathbf{n}) d\sigma = \iint_{D_{xy}} 2x dx dy,$$

где D_{xy} — проекция круга $x^2 + y^2 \leq 2$, $z = \sqrt{2}$ на плоскость xy .

Переходя к полярным координатам, найдем

$$C = 2 \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} \rho^2 d\rho = 0.$$

§ 9. Оператор Гамильтона*

Дифференциальные операции — градиент, дивергенция, ротор удобно представлять при помощи символического вектора — оператора Гамильтона ∇ (набла)

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}.$$

* У. Гамильтон (1805—1865) — английский математик и механик.

Сам вектор ∇ не имеет реального смысла, но, действуя на скалярную функцию или вектор, он приобретает вполне определенный смысл. Так, например,

$$\nabla \varphi = \left(i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \right) \varphi = i \frac{\partial \varphi}{\partial x} + j \frac{\partial \varphi}{\partial y} + k \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \text{grad } \varphi.$$

$$\begin{aligned} (\nabla \mathbf{a}) &= \left(i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \right) (i a_x + j a_y + k a_z) = \\ &= \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \text{div } \mathbf{a}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\nabla \mathbf{a}] &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = i \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) - j \left(\frac{\partial a_z}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial z} \right) + \\ &+ k \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) = \text{rot } \mathbf{a}. \end{aligned}$$

При действиях с оператором «набла» следует руководствоваться правилами векторной алгебры и правилами дифференцирования. Например,

$$\text{rot}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \nabla \times (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \nabla \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \text{rot } \mathbf{a} + \text{rot } \mathbf{b}.$$

С помощью оператора «набла» можно записывать дифференциальные операции второго порядка. Рассмотрим часто встречающиеся три из них.

$$\begin{aligned} 1) \text{ div}(\text{grad } \varphi) &= \nabla (\nabla \varphi) = \nabla^2 \varphi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi = \\ &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \Delta \varphi. \end{aligned}$$

Символ

$$\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

называется *оператором Лапласа** (лапласианом).

$$2) \text{ div}(\text{rot } \mathbf{a}) = \nabla [\nabla \mathbf{a}].$$

По свойству смешанного произведения переставим векторы

$$\nabla [\nabla \mathbf{a}] = \mathbf{a} [\nabla \nabla] = 0,$$

так как мы имеем два одинаковых вектора. Итак,

$$\text{div}(\text{rot } \mathbf{a}) = \nabla [\nabla \mathbf{a}] = 0.$$

$$3) \text{ rot}(\text{grad } \varphi) = \nabla \times (\nabla \varphi) = \varphi [\nabla \nabla] = 0.$$

Здесь скаляр φ вынесен за знак векторного произведения.

* П. Лаплас (1749—1827) — французский математик и физик.

Ряды Фурье. Интеграл Фурье

Тригонометрические ряды Фурье, о которых пойдет речь в настоящей главе, находят широкое применение не только в различных областях математики и теоретической физики, но и в технике, например при исследовании системы автоматического регулирования, решении уравнений диффузии, изучении различных колебательных систем и многих других вопросов прикладной математики — всюду, где приходится сталкиваться с периодическими процессами, а сами явления можно описать периодическими функциями.

§ 1. Периодические функции

Функция $f(x)$ называется *периодической*, если существует такое постоянное T ($T \neq 0$), что для любого x , взятого из области ее определения, имеет место равенство

$$f(x + T) = f(x). \quad (1)$$

Число T называется *периодом* функции $f(x)$. Число, кратное T , будет также являться периодом функции, т. е.

$$f(x + nT) = f(x) \quad (n — \text{целое}),$$

в чем легко убедиться, если применить n раз условие (1).

Иллюстрацией периодичности явлений может служить, например, колебание математического маятника, неограниченно повторяющего свои движения; морские приливы и отливы, происходящие через определенные интервалы времени, и т. д.

Геометрически периодичность функции $f(x)$ означает, что ординаты двух произвольных точек с абсциссами, отличающимися на величину, кратную периоду T , равны между собой (рис. 23).

Отметим одно важное свойство периодической функции. Интеграл от нее по периоду не зависит от положения интервала интегрирования; иначе говоря, если $f(x + T) = f(x)$, то интеграл

$$I = \int_x^{x+T} f(z) dz = \int_0^T f(z) dz \quad (2)$$

и, следовательно, не зависит от x (см. рис. 23). При этом предполагается, что функция $f(x)$ на интервале, равном периоду T , непрерывна.

Действительно, по правилу дифференцирования сложной функции и свойству производной определенного интеграла по верхнему и нижнему пределам запишем:

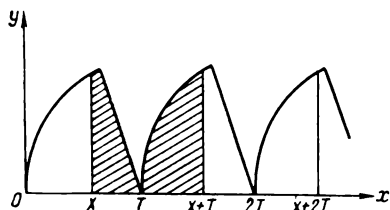


Рис. 23

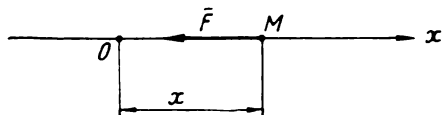


Рис. 24

$$\frac{dI}{dx} = f(x+T) \frac{d(x+T)}{dx} - f(x) \frac{dx}{dx} = f(x+T) - f(x) = 0.$$

Из $\frac{dI}{dx} = 0$ следует, что $I = C$, т. е. от x не зависит.

§ 2. Гармоники

Простейшей периодической функцией является синусоидальная, часто называемая *простой гармоникой*,

$$y = A \sin(\omega x + \varphi_0), \quad (3)$$

где A , ω и φ_0 — постоянные. Период этой функции равен $\frac{2\pi}{\omega}$, в чем легко убедиться:

$$\begin{aligned} y &= A \sin \left[\omega \left(x + \frac{2\pi}{\omega} \right) + \varphi_0 \right] = A \sin [(\omega x + \varphi_0) + 2\pi] = \\ &= A \sin(\omega x + \varphi_0). \end{aligned}$$

Синусоидальная функция (3) описывает гармонические колебания, которые возникают в силу самых разнообразных причин. Например, точка M с массой m движется прямолинейно под действием силы притяжения F к неподвижной точке O (рис. 24). Допустим, что модуль силы F пропорционален расстоянию точки M от центра, т. е. $F = -kx$. Тогда по второму закону Ньютона имеем

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx$$

или

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \quad (4)$$

где обозначено $\omega^2 = \frac{k}{m}$. Решением дифференциального уравнения (4) будет функция $x = A \sin(\omega t + \varphi_0)$, в чем можно убедиться, если ее подставить в уравнение (4). Величина A — наибольшее отклонение точки M от O — называется *амплитудой* колебания (размах колебания), аргумент $(\omega t + \varphi_0)$ называется *фазой* колебания, где ω — круговая частота и φ_0 — начальная фаза. Величина, обратная периоду $\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$, называется *частотой*; она показывает, сколько раз данное периодическое явление повторяется за единицу времени.

Синусоидальную функцию (3) часто представляют в виде

$$a \cos \omega x + b \sin \omega x. \quad (5)$$

Воспользуемся известной формулой тригонометрии

$$A \sin(\omega x + \varphi_0) = A \cos \varphi_0 \sin \omega x + A \sin \varphi_0 \cos \omega x.$$

Вводя обозначения

$$a = A \sin \varphi_0, \quad b = A \cos \varphi_0, \quad (6)$$

получим:

$$A \sin(\omega x + \varphi_0) = a \cos \omega x + b \sin \omega x. \quad (7)$$

Для перехода от правой части равенства (7) к левой достаточно найти амплитуду A и начальную фазу φ_0 . Из (6)

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \varphi_0 = \operatorname{arctg} \frac{a}{b}.$$

Заметим, что если в гармонике $y = A \sin(\omega x + \varphi_0)$ положить $A = 1$, $\omega = 1$, $\varphi_0 = 0$, то получим функцию $y = \sin x$, графиком которой является обычная синусоида.

График гармоники (3) можно получить путем деформации обычной синусоиды в направлении осей координат и параллельным сдвигом вдоль оси x . Практически построение графика функции $y = A \sin(\omega x + \varphi_0)$ проводится следующим образом.

1. Строят график синусоиды $y = \sin x$.

2. Ординаты точек графика синусоиды увеличивают в A раз, не изменяя абсцисс. При этом, если $A < 0$, то ординаты изменяются не только по абсолютной величине, но и по знаку.

3. Производится равномерное сжатие по оси x в ω раз, если $\omega > 1$, и растяжение в $\frac{1}{\omega}$ раз, если $\omega < 1$.

4. Точки графика сдвигаются на $-\frac{\varphi_0}{\omega}$ вдоль оси абсцисс.

Полученные точки соединяют плавной кривой.

На рис. 25 показано построение графика функции $y = 2 \sin 2 \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$.

Простые гармоника можно складывать, и тогда результирующей окажется простая или сложная гармоника. Если составляющие гармоника имеют одинаковую частоту, то и сумма их — гармоника с той же частотой и тем же периодом,

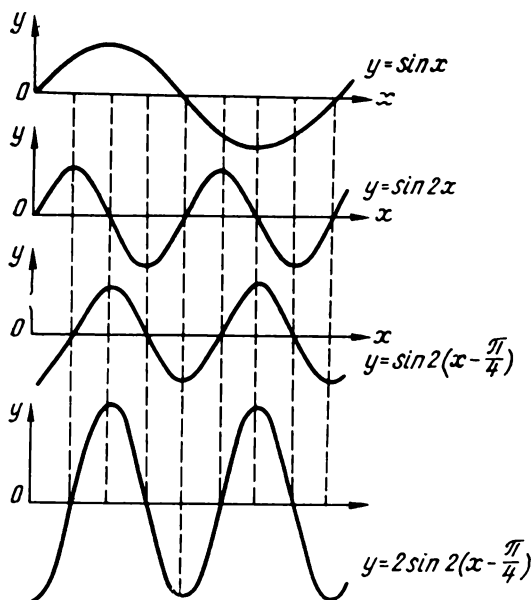


Рис. 25

т. е. простая гармоника. Наоборот, складывая гармоника разных частот, получим существенно новую периодическую функцию — сложную гармоника.

Пусть требуется сложить три гармоника:

$$y = A_1 \sin(\omega_1 x + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega_2 x + \varphi_2) + A_3 \sin(\omega_3 x + \varphi_3), \quad (8)$$

круговые частоты которых находятся в таком соотношении:

$$\omega_2 = 2\omega_1 \text{ и } \omega_3 = 3\omega_1,$$

а их периоды соответственно равны $T, \frac{T}{2}, \frac{T}{3}$. Сумма гармоник — функция с периодом T ; график ее значительно отличается от графика каждого слагаемого.

На рис. 26 показано сложение трех гармоник:

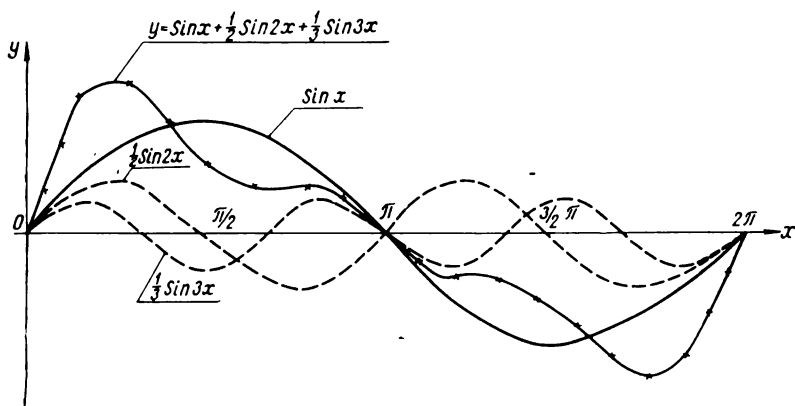
$$y = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{3} \sin 3x.$$

Здесь ординаты кривых трех гармоник суммируются алгебраически.

В выражении (8) круговые частоты гармоник являются соизмеримыми, т. е. их отношения равны целому или отношению целых чисел:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = 2, \quad \frac{\omega_3}{\omega_1} = 3, \quad \frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{2}{3}.$$

Если же круговые частоты складываемых гармоник окажутся несоизмеримыми, т. е. их отношение будет числом иррациональным, то сумма гармоник будет непериодической функцией.



Р и с. 26

§ 3. Тригонометрические ряды

В предыдущем параграфе указывалось, что сумма простых гармоник, частоты которых соизмеримы, — новая периодическая функция, график которой существенно отличается от графиков составляющих гармоник.

Возникает обратная задача: можно ли заданную периодическую функцию представить в виде суммы конечного или бесконечного числа гармоник? Оказывается, что широкий класс функций можно представить бесконечным тригонометрическим рядом вида

$$f(x) = a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \dots + (a_n \cos nx + b_n \sin nx) + \dots \quad (9)$$

Класс функций, представимых конечным числом гармоник, весьма ограничен. Мы подробнее остановимся на изучении ряда (9), который принято записывать в следующем виде:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Постоянные a_n, b_n ($n = 1, 2, \dots$) называются *коэффициентами* ряда. *Свободный член*, как это выяснится из дальнейшего, удобно записывать в виде $\frac{a_0}{2}$.

Установим несколько вспомогательных формул, которые нам понадобятся при определении коэффициентов a_n и b_n .
При $n \neq 0$

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx &= \left[\frac{\sin nx}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx &= \left[-\frac{\cos nx}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Воспользуемся известными формулами тригонометрии:

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2} [\cos (m+n)x + \cos (m-n)x],$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2} [\cos (m-n)x - \cos (m+n)x],$$

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2} [\sin (m+n)x + \sin (m-n)x].$$

Легко проверить, что для любых целых m и n ($m \neq n$) справедливо

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos (m+n)x + \cos (m-n)x] dx = 0, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos (m-n)x - \cos (m+n)x] dx = 0; \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

для любых целых m и n

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\sin (m+n)x + \sin (m-n)x] dx = 0; \quad (12)$$

для $m = n$

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [1 + \cos 2nx] dx = \frac{1}{2} \left[x + \frac{\sin 2nx}{2n} \right]_{-\pi}^{\pi} = \pi, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [1 - \cos 2nx] dx = \frac{1}{2} \left[x - \frac{\sin 2nx}{2n} \right]_{-\pi}^{\pi} = \pi. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

В § 1 было показано, что интеграл от периодической функции по периоду не зависит от положения интервала интегрирования. Поэтому формулы (10) — (13) будут справедливы не только для интервала $(-\pi, \pi)$, но и для любого интервала длины 2π .

§ 4. Ряды Фурье. Коэффициенты Фурье

Пусть задана функция $f(x)$ на интервале $(-\pi, \pi)$. Предполагаем, что на этом интервале ее можно разложить в равномерно сходящийся ряд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (14)$$

который можно почленно интегрировать.

Отметим также следующее свойство (без доказательства). Равномерная сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на интервале (a, b) не нарушится, если все его члены умножить на функцию $\varphi(x)$, непрерывную на этом интервале.

Интегрируя правую и левую части (14) в пределах от $-\pi$ до π , получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx = \pi a_0. \quad (15)$$

Отсюда

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx.$$

Интегралы от остальных членов ряда в силу формул (10) обратятся в нуль.

Для отыскания коэффициента a_m , где m — любое целое положительное число, обе части равенства (14) умножим на $\cos mx$ и, учитывая только что отмеченное свойство, проинтегрируем в пределах от $-\pi$ до π :

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx dx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx + \\ &+ b_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx dx). \end{aligned}$$

Все интегралы в правой части, исключая интеграл при коэффициенте a_m , равны нулю в силу формул (11) и (12). Интеграл же при коэффициенте a_m , согласно первой формуле (13), равен π , т. е.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx = a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx dx = \pi a_m. \quad (16)$$

Отсюда

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx.$$

Для отыскания коэффициента b_m умножим обе части равенства (14) на $\sin mx$ и проинтегрируем в пределах от $-\pi$ до π :

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx dx + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx \right). \end{aligned}$$

На основании формул (11) и (12) все слагаемые в правой части равны нулю, кроме интеграла при коэффициенте b_m . Этот интеграл, согласно второй формуле (13), равен π :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx = b_m \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx dx = b_m \pi.$$

Отсюда

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx. \quad (17)$$

Коэффициенты, определенные по формулам (15) — (17), называются *коэффициентами Фурье*, а ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

с такими коэффициентами называется *рядом Фурье* функции $f(x)$.

При определении коэффициентов ряда Фурье мы воспользовались почленным интегрированием левой и правой частей равенства (14), исходя из предположения, что данный ряд равномерно сходится.

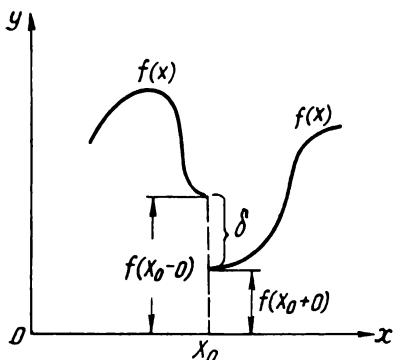
Какими свойствами должна обладать функция $f(x)$, чтобы построенный для нее ряд Фурье равномерно сходиллся? Прежде чем ответить на этот вопрос, дадим некоторые определения.

Определение 1. Функция $f(x)$ называется *гладкой на интервале (a, b)* , если на этом интервале она непрерывна вместе со своей первой производной.

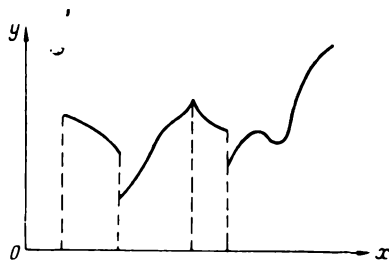
Определение 2. Функция называется *кусочногладкой на интервале (a, b)* , если этот интервал можно разбить на ко-

нечное число частичных интервалов $(a, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_{n-1}, b)$, на каждом из которых функция $f(x)$ — гладкая.

Из определения вытекает, что кусочногладкая функция $f(x)$ ограничена на интервале (a, b) и может иметь лишь конечное число точек разрыва первого рода.



Р и с. 27



Р и с. 28

Напомним, что для непрерывной функции $f(x)$ в точке x_0 предел слева $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$, когда $x < x_0$, и предел справа $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$, когда $x > x_0$, равны между собой, т. е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x).$$

Если в точке x_0 существует разрыв первого рода, то величина

$$\delta = f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$$

называется *скачком* функции $f(x)$ в точке x_0 (рис. 27).

Графиком гладкой функции является кривая линия с непрерывно вращающейся касательной; график кусочногладкой функции состоит из конечного числа гладких дуг (рис. 28).

Сформулируем теперь теорему (без доказательства) о возможности разложения функции $f(x)$ в ряд Фурье.

Теорема. Если функция $f(x)$ кусочногладкая на интервале $(-\pi, \pi)$, то ее ряд Фурье сходится к значению функции во всех точках, где она непрерывна; в точках разрыва функции $f(x)$ ряд сходится к среднему арифметическому ее предельных значений слева и справа, т. е. к значению

$$\frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2},$$

где x_0 — точка разрыва первого рода; на концах интервала ряд сходится также к среднему арифметическому предельных

значений функции при стремлении независимой переменной к этим граничным точкам изнутри интервала

$$\frac{f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)}{2}.$$

Условия теоремы охватывают широкий класс функций. При разложении в ряд Тейлора требовалось, чтобы на интервале сходимости функция была не только непрерывна, но и бесконечное число раз дифференцируема. Для разложения функции в ряд Фурье лишь требуется, чтобы функция и ее первая производная были непрерывными; в отдельных точках допускается разрыв первого рода.

Условия изложенной выше теоремы о разложимости функции $f(x)$ в ряд Фурье могут быть несколько иными. Достаточно, чтобы функция $f(x)$ с периодом 2π на интервале $(-\pi, \pi)$ имела конечное число максимумов и минимумов и была непрерывной, исключая, быть может, конечное число точек разрыва первого рода. В этом случае ряд Фурье сходится к функции $f(x)$ в каждой точке непрерывности и к сумме

$$\frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}$$

в каждой точке разрыва (условие Дирихле *).

§ 5. Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций

Напомним, что функция $f(x)$ называется *четной*, если для всех значений x имеет место $f(-x) = f(x)$.

Функция называется *нечетной*, если для всех x имеет место $f(-x) = -f(x)$.

График четной функции симметричен относительно оси ординат; график нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Если интегрируемая на интервале $(-a, a)$ функция $f(x)$ четная, то

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx;$$

если $f(x)$ — нечетная, то

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

* П. Дирихле (1805—1859) — известный немецкий математик.

Действительно,

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx.$$

При замене x на $-x$

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_0^a f(-x) dx.$$

Тогда

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)] dx. \quad (18)$$

Таким образом, для четной функции $f(x)$

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx,$$

для нечетной

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

Пусть разлагаемая в ряд Фурье функция $f(x)$ четная, тогда произведение $f(x) \sin mx$ — нечетная функция и интеграл, взятый на интервале $(-\pi, \pi)$ от такой функции, равен нулю. Все коэффициенты b_m в ряду Фурье окажутся нулями, а сам ряд будет состоять из одних косинусов:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos mx,$$

где

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos mx dx$$

$$(m = 0, 1, 2, \dots). \quad (19)$$

Предположим сейчас, что функция $f(x)$ нечетная. В этом случае функция $f(x) \cos mx$ нечетная и все коэффициенты a_m ряда, включая a_0 , обратятся в нуль.

Ряд Фурье будет содержать только синусы

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin mx,$$

где

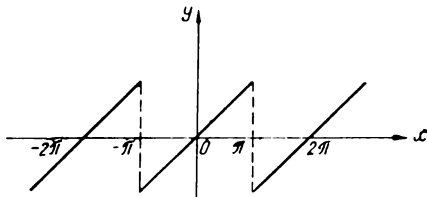
$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin mx dx. \quad (20)$$

Как показывают формулы (19) и (20), коэффициенты Фурье можно вычислять, если функция $f(x)$ задана на половине периода.

§ 6. Примеры на разложение функций в ряд Фурье

Пример 1. Найти ряд Фурье для функции $f(x) = x$ ($-\pi \leq x < \pi$). График функции с ее периодическим продолжением показан рис. 29.

Решение. Функция удовлетворяет условиям Дирихле — она непрерывна и ограничена на заданном интервале, а потому допускает разложение в ряд Фурье. Так как эта функция нечетная, то ряд Фурье будет содержать только синусы. В самом деле



Р и с. 29

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Для отыскания a_m используем формулу (19), интеграл возьмем по частям

$$a_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos mx dx = \frac{2}{\pi} \left[x \frac{\sin mx}{m} - \frac{1}{m} \int \sin mx dx \right]_0^{\pi} = 0.$$

По формуле (20)

$$\begin{aligned} b_m &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin mx dx = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{x \cos mx}{m} + \frac{1}{m} \int \cos mx dx \right]_0^{\pi} = \\ &= \frac{2}{\pi} \left[-x \frac{\cos mx}{m} + \frac{\sin mx}{m^2} \right]_0^{\pi} = (-1)^{m+1} \frac{2}{m} \quad (m = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Запишем теперь ряд

$$f(x) = 2 \left[\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots + (-1)^{m+1} \frac{\sin mx}{m} + \dots \right].$$

Ряд сходится во всех точках, кроме точек разрыва. В точках разрыва $x = (2k+1)\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) значение функции равно среднему арифметическому ее пределов справа и слева, т. е. нулю.

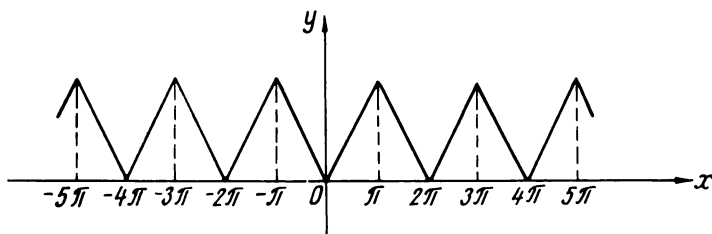
Пример 2. Найти ряд Фурье для функции $f(x) = |x|$ ($-\pi \leq x \leq \pi$). График функции вместе с ее периодическим про-

должением на всю числовую ось с периодом 2π показан на рис. 30.

Решение. Так как функция $|x|$ четная, то все коэффициенты b_m равны нулю. По формуле (19) имеем:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \pi,$$

$$a_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos mx dx.$$



Р и с. 30

Интегрируя по частям, находим

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{2}{\pi} \left[x \frac{\sin mx}{m} - \frac{1}{m} \int \sin mx dx \right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x \sin mx}{m} + \frac{1}{m^2} \cos mx \right]_0^{\pi} = \\ &= \frac{2}{\pi m^2} \cos mx \Big|_0^{\pi} = -\frac{2}{\pi} \frac{(1 - \cos \pi m)}{m^2} = \begin{cases} -\frac{4}{\pi m^2} & \text{при } m \text{ нечетном,} \\ 0 & \text{при } m \text{ четном.} \end{cases} \end{aligned}$$

Следовательно,

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots + \frac{\cos (2m-1)x}{(2m-1)^2} + \dots \right).$$

Полагая $x = 0$, получим

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots \right),$$

откуда

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots$$

Полученным рядом можно воспользоваться для вычисления суммы ряда

$$S = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

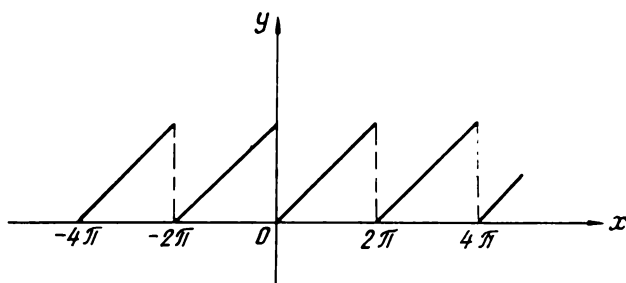
который представим в таком виде:

$$S = \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots\right) = \\ = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots\right) = \frac{\pi^2}{8} + \frac{S}{4}.$$

Тогда $S = \frac{\pi^2}{6}$, т. е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Пример 3. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = x$ ($0 \leq x \leq 2\pi$). График функции с ее периодическим продолжением представлен на рис. 31.



Р и с. 31

Решение. Данная функция на интервале $(-\pi, \pi)$ задается двумя формулами:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2\pi & \text{при } -\pi \leq x < 0, \\ x & \text{при } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Для вычисления коэффициентов Фурье интервал $(-\pi, \pi)$, где функция задается двумя формулами, заменим отрезком длины 2π , где она задана формулой $f(x) = x$, и, воспользовавшись свойством периодической функции (см. формулу (2) § 1), найдем:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x dx = \frac{x^2}{2\pi} \Big|_0^{2\pi} = 2\pi;$$

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \cos mx dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x \sin mx}{m} + \frac{1}{m^2} \cos mx \right]_0^{2\pi} = 0;$$

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \sin mx dx = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{x \cos mx}{m} + \frac{\sin mx}{m^2} \right]_0^{2\pi} = -\frac{2}{m}.$$

Поэтому для $0 \leq x \leq 2\pi$

$$x = \pi - 2 \left(\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots \frac{\sin mx}{m} + \dots \right) =$$

$$= \pi - 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin mx}{m}.$$

Из полученного разложения можем получить сумму тригонометрического ряда

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin mx}{m} = \frac{\pi - x}{2} \quad (0 \leq x \leq 2\pi).$$

В точках разрыва $x = 2\pi m$ ($m = 0, +1, +2, \dots$) сумма ряда равна среднему арифметическому предельных значений функции $f(x)$ справа и слева, т. е. π .

Пример 4. Разложить в ряд Фурье функцию

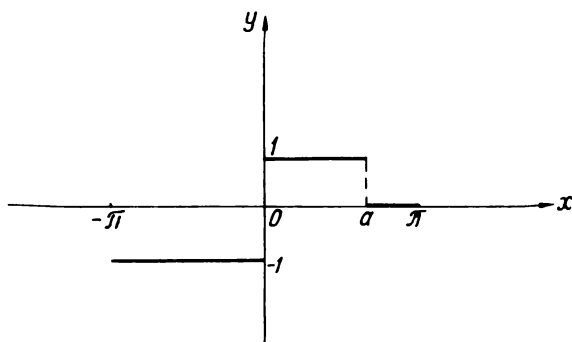


Рис. 32

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{при } -\pi \leq x < 0, \\ 1 & \text{при } 0 \leq x < a, \\ 0 & \text{при } a \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Решение. Функция удовлетворяет условиям Дирихле, а потому может быть разложена в ряд Фурье.

Определим коэффициенты Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left[- \int_{-\pi}^0 1 \cdot dx + \int_0^a 1 \cdot dx + \int_a^{\pi} 0 \cdot dx \right] =$$

$$= - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 dx + \frac{1}{\pi} \int_0^a dx = \frac{a}{\pi} - 1;$$

$$\begin{aligned}
a_m &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx = \frac{1}{\pi} \left[- \int_{-\pi}^0 1 \cdot \cos mx dx + \int_0^a 1 \cdot \cos mx dx + \right. \\
&\quad \left. + \int_a^{\pi} 0 \cdot \cos mx dx \right] = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{-\pi} \cos mx dx + \int_0^a \cos mx dx \right] = \\
&= \frac{1}{\pi m} [\sin mx]_0^{-\pi} + \frac{1}{\pi m} [\sin mx]_0^a = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sin ma}{m}; \\
b_m &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx = \frac{1}{\pi} \left[- \int_{-\pi}^0 \sin mx dx + \int_0^a \sin mx dx + \right. \\
&\quad \left. + \int_a^{\pi} 0 \cdot \sin mx dx \right] = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{-\pi} \sin mx dx + \int_0^a \sin mx dx \right] = \\
&= -\frac{1}{\pi m} [\cos mx]_0^{-\pi} - \frac{1}{\pi m} [\cos mx]_0^a = -\frac{1}{\pi m} [\cos m\pi - 2 + \cos ma] = \\
&= \begin{cases} \frac{1 - \cos ma}{\pi m} & \text{при } m \text{ четном,} \\ \frac{3 - \cos ma}{\pi m} & \text{при } m \text{ нечетном.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a}{2\pi} - \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin a}{1} \cos x + \frac{3 - \cos a}{1} \sin x + \right. \\
&\quad + \frac{\sin 2a}{2} \cos 2x + \frac{1 - \cos 2a}{2} \sin 2x + \frac{\sin 3a}{3} \cos 3x + \\
&\quad \left. + \frac{3 - \cos 3a}{3} \sin 3x + \dots \right].
\end{aligned}$$

Ряд сходится в точках непрерывности функции. В точках разрыва сумма ряда равна нулю при $x = 0$ и равна $\frac{1}{2}$ для значений $x = a$.

Пример 5. Найти ряд Фурье для функции $f(x) = 5x + 2$ ($-\pi \leq x \leq \pi$).

Решение. Функция удовлетворяет условиям Дирихле, а потому может быть разложена в ряд Фурье. Найдем коэффициенты ряда:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (5x + 2) dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{5x^2}{2} + 2x \right]_{-\pi}^{\pi} = 4, \\
a_m &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (5x + 2) \cos mx dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{5x + 2}{m} \sin mx - \frac{5}{m} \int \sin mx dx \right]_{-\pi}^{\pi} = \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\frac{5x + 2}{m} \sin mx + \frac{5}{m^2} \cos mx \right]_{-\pi}^{\pi} = 0.
\end{aligned}$$

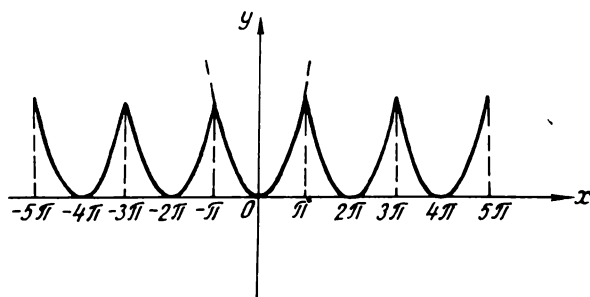
Полученное равенство $a_m = 0$ можно было предвидеть и заранее, так как функция $f(x) = 5x + 2$ отличается от нечетной $f_1(x) = 5x$ только постоянным слагаемым, которое увеличивает соответствующие ординаты на две единицы.

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (5x + 2) \sin mx dx = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{5x+2}{m} \cos mx + \frac{5}{m^2} \sin mx \right]_{-\pi}^{\pi} = -10 \frac{\cos \pi m}{m} = \frac{10}{m} (-1)^{m+1}.$$

Итак,

$$f(x) = 2 + 10 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m} \sin mx.$$

В точках разрыва сумма ряда равна числу 2.



Р и с. 33

Пример 6. Разложить функцию $f(x) = x^2$ ($-\pi \leq x \leq \pi$) в ряд Фурье. Функция всюду непрерывная. Ее график с периодическим продолжением изображен на рис. 33.

Решение. Функция $f(x)$ четная, а потому коэффициенты b_m равны нулю.

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}.$$

Два раза интегрируя по частям, найдем

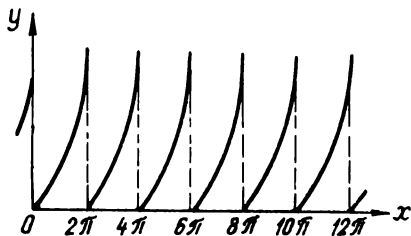
$$\begin{aligned} a_m &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos mx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos mx dx = \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^2 \sin mx}{m} - \frac{2}{m} \int x \sin mx dx \right]_0^{\pi} = -\frac{4}{\pi m} \left[-\frac{x \cos mx}{m} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{m^2} \sin mx \right]_0^{\pi} = \frac{4}{\pi m^2} [x \cos mx]_0^{\pi} = \frac{4 \cos \pi m}{m^2} = \frac{4}{m^2} (-1)^m. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m^2} \cos mx - \frac{\pi^2}{3} - \\ - 4 \left(\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \dots \right).$$

Пример 7. Найти ряд Фурье для функции $f(x) = x^2$ ($0 \leq x \leq \leq 2\pi$). График периодически продолженной функции изображен на рис. 34.

Решение. Функция $f(x)$ не относится ни к классу четных, ни к классу нечетных функций.



Р и с. 34

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{x^3}{3\pi} \Big|_0^{2\pi} = \frac{8\pi^2}{3}.$$

Два раза интегрируя по частям, находим:

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \cos mx dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^2 \sin mx}{m} - \frac{2}{m} \int x \sin mx dx \right]_0^{2\pi} = \\ = \frac{2}{\pi m^2} [x \cos mx - \int \cos mx dx]_0^{2\pi} = \frac{2}{\pi m^2} \left[x \cos mx - \right. \\ \left. - \frac{1}{m} \sin mx \right]_0^{2\pi} = \frac{4}{m^2}; \\ b_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \sin mx dx = -\frac{1}{\pi m} [x^2 \cos mx]_0^{2\pi} + \frac{2}{\pi m} \int_0^{2\pi} x \cos mx dx = \\ = -\frac{4\pi}{m} - \frac{2}{\pi m^2} \int_0^{2\pi} \sin mx dx = -\frac{4\pi}{m}.$$

Разложение в ряд Фурье примет вид

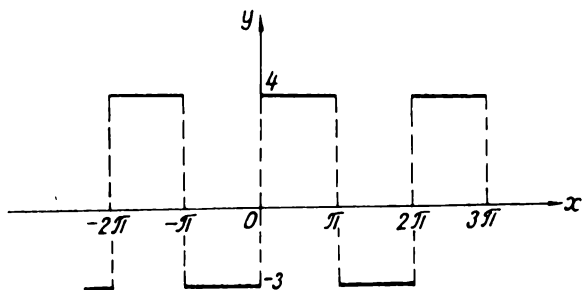
$$f(x) = \frac{4\pi^2}{3} + 4 \left(\cos x - \pi \sin x + \frac{\cos 2x}{2^2} - \frac{\pi \sin 2x}{2} + \right. \\ \left. + \dots + \frac{\cos mx}{m^2} - \frac{\pi \sin mx}{m} + \dots \right) =$$

$$= \frac{4\pi^2}{3} + 4 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos mx}{m^2} - 4\pi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin mx}{m}.$$

Пример 8. Написать ряд Фурье для функции

$$f(x) = \begin{cases} 4 & \text{при } 0 \leq x < \pi, \\ -3 & \text{при } \pi \leq x \leq 2\pi. \end{cases}$$

График функции с ее периодическим продолжением показан на рис. 35.



Р и с. 35

Решение. Воспользовавшись периодичностью функции, интервал интегрирования, равный 2π , возьмем в промежутке $(-\pi, \pi)$. Тогда

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 3 dx + \int_0^{\pi} 4 dx \right] = \frac{3}{\pi} [x]_{-\pi}^0 + \frac{4}{\pi} [x]_0^{\pi} = 1,$$

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx = \frac{3}{\pi} \int_{-\pi}^0 \cos mx dx + \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi} \cos mx dx = \\ &= \frac{3}{\pi m} [\sin mx]_{-\pi}^0 + \frac{4}{\pi} [\sin mx]_0^{\pi} = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_m &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 3 \sin mx dx + \int_0^{\pi} 4 \sin mx dx \right] = \\ &= + \frac{3}{\pi m} [\cos mx]_{-\pi}^0 - \frac{4}{\pi m} [\cos mx]_0^{\pi} = \frac{-7}{\pi} \cdot \frac{(-1)^m - 1}{m}. \end{aligned}$$

Итак,

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{7}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m - 1}{m} \sin mx =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{14}{\pi} \left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots \right).$$

В точках разрыва сумма ряда равна $\frac{1}{2}$.

Пример 9. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = e^{ax}$ ($a \neq 0$, $-\pi \leq x \leq \pi$).

Решение.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ax} dx = \frac{1}{\pi a} (e^{a\pi} - e^{-a\pi}) = \frac{2 \operatorname{sh} a \pi}{a \pi},$$

где $\operatorname{sh} a\pi = \frac{e^{a\pi} - e^{-a\pi}}{2}$ — гиперболический синус.

Пользуясь формулой интегрирования по частям, находим:

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ax} \cos mx dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{a \cos mx + m \sin mx}{m^2 + a^2} e^{ax} \right]_{-\pi}^{\pi} = (-1)^m \frac{1}{\pi} \cdot \frac{2a \operatorname{sh} a \pi}{m^2 + a^2}; \\ b_m &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ax} \sin mx dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{a \sin mx - m \cos mx}{m^2 + a^2} e^{ax} \right]_{-\pi}^{\pi} = (-1)^{m-1} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{2m}{m^2 + a^2} \operatorname{sh} a \pi. \end{aligned}$$

Таким образом, в интервале $(-\pi, \pi)$ получим разложение

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \operatorname{sh} a \pi \left\{ \frac{1}{2a} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m^2 + a^2} [a \cos mx - m \sin mx] \right\}.$$

Пример 10. Найти ряд Фурье для функции $f(x) = \pi - x$ ($0 \leq x \leq 2\pi$). График функции с ее периодическим продолжением на всю ось x изображен на рис. 36.

Решение.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (\pi - x) dx = \frac{1}{\pi} \left[\pi x - \frac{x^2}{2} \right]_0^{2\pi} = 0.$$

Интегрируя по частям, найдем остальные коэффициенты:

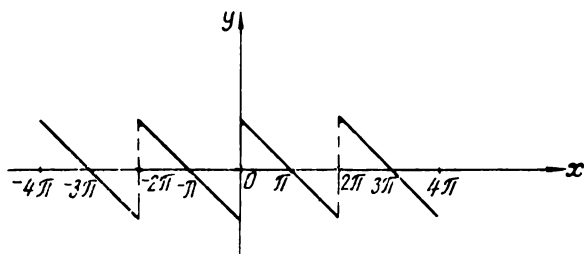
$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (\pi - x) \cos mx dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi - x}{m} \sin mx + \frac{1}{m} \int \sin mx dx \right]_0^{2\pi} = \\ &= -\frac{1}{\pi m^2} [\cos mx]_0^{2\pi} = 0; \end{aligned}$$

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (\pi - x) \sin mx dx = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\pi - x}{m} \cos mx - \frac{1}{m} \int \cos mx dx \right]_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\pi - x}{m} \cos mx - \frac{1}{m^2} \sin mx \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi m} \left[(x - \pi) \cos mx \right]_0^{2\pi} = \frac{2}{m}.$$

Разложение в ряд Фурье имеет вид

$$\pi - x = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin mx}{m}.$$

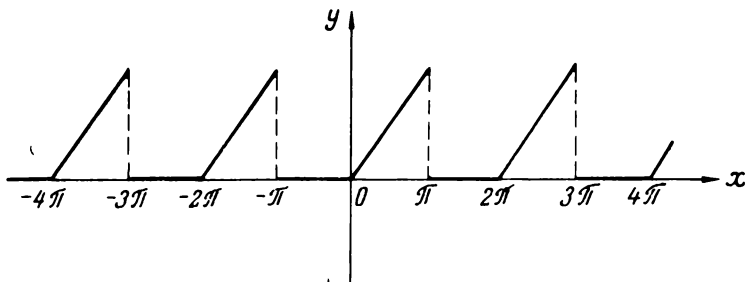


Р и с. 36

Пример 11. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -\pi \leq x < 0, \\ x & \text{при } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

График функции вместе с периодическим продолжением на всю ось x представлен на рис. 37.



Р и с. 37

Решение. Находим коэффициенты Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{x^2}{2\pi} \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2};$$

$$\begin{aligned}
 a_m &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos mx dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x \sin mx}{m} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{m} \int \sin mx dx \right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi m^2} [\cos mx]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{(-1)^m - 1}{m^2} \right]; \\
 b_m &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin mx dx = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{x \cos mx}{m} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{m} \int \cos mx dx \right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{x \cos mx}{m} + \frac{\sin mx}{m^2} \right]_0^{\pi} = -\frac{\cos m \pi}{m} = \frac{(-1)^{m+1}}{m}.
 \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \cos x + \sin x - \frac{\sin 2x}{2} - \frac{2}{9\pi} \cos 3x + \frac{\sin 3x}{3} - \\
 &\quad - \frac{\sin 4x}{4} - \dots = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \left(\frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right) + \\
 &\quad + \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots \right).
 \end{aligned}$$

В точках разрыва функции $f(x)$ сумма ряда равна $\frac{\pi}{2}$.

§ 7. Ряд Фурье на произвольном интервале

Часто приходится рассматривать задачу о разложении в ряд Фурье периодической функции $f(x)$, заданной на интервале $(-l, l)$, где l — произвольное число ($l > 0$).

Если функция $f(x)$ на заданном интервале $(-l, l)$ удовлетворяет условиям Дирихле (см. § 4), то ее разложение может быть легко осуществлено путем замены независимой переменной $t = \frac{\pi}{l} x$. Когда x пробегает интервал $(-l, l)$, переменная t пробегает интервал $(-\pi, \pi)$. В этом случае функция $f(x) = f\left(\frac{l}{\pi} t\right)$ будет иметь период 2π и, следовательно, может быть разложена в ряд Фурье

$$f(x) = f\left(\frac{l}{\pi} t\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mt + b_m \sin mt),$$

иначе

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos \frac{m \pi x}{l} + b_m \sin \frac{m \pi x}{l} \right), \quad (21)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi} t\right) dt = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx; \\ a_m &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi} t\right) \cos mt dt = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{m \pi x}{l} dx; \\ b_m &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi} t\right) \sin mtdt = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{m \pi x}{l} dx. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Ряд (21) представляет собой функцию с периодом $2l$.

Заметим, что формулы для определения коэффициентов Фурье в случае четных и нечетных функций записываются по аналогии с формулами (19) и (20).

Для четных функций

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx, \\ a_m &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{m \pi x}{l} dx, \\ b_m &= 0 \quad (m = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Если функция $f(x)$ нечетная, то ее ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin \frac{m \pi x}{l}$$

содержит только синусы, где

$$b_m = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{m \pi x}{l} dx. \quad (24)$$

Коэффициенты $a_m = 0$ ($m = 0, 1, 2, \dots$).

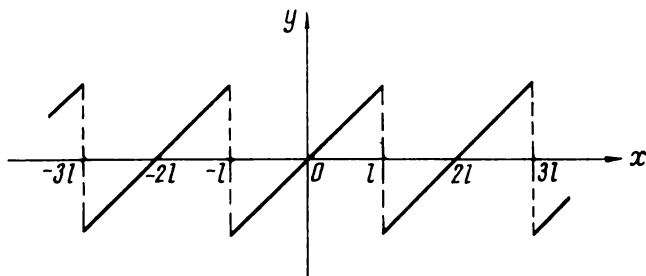
Пример 1. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = x$ с периодом $2l$ на интервале $(-2, 2)$. График функции, периодически продолженный на всю числовую ось, показан на рис. 38.

Решение.

Функция $f(x)$ нечетная, следовательно, ее ряд Фурье будет содержать только синусы

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin \frac{\pi m x}{l};$$

$$\begin{aligned}
 b_m &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi mx}{l} dx = \int_0^2 x \sin \frac{\pi mx}{2} dx = \\
 &= \left[-\frac{2}{\pi m} x \cos \frac{\pi mx}{2} + \frac{2}{\pi m} \int \cos \frac{\pi mx}{2} dx \right]_0^2 = \left[-\frac{2x}{\pi m} \cos \frac{\pi mx}{2} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{4}{\pi^2 m^2} \sin \frac{\pi mx}{2} \right]_0^2 = \frac{-4}{\pi m} \cos \pi m = \frac{4}{\pi m} (-1)^{m+1};
 \end{aligned}$$



Р и с. 38

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{\sin \frac{\pi mx}{2}}{m} = \frac{4}{\pi} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{2} x}{1} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\sin \frac{2\pi}{2} x}{2} + \frac{\sin \frac{3\pi}{2} x}{3} - \dots \right).
 \end{aligned}$$

Пример 2. Разложить функцию с периодом $2l = 2$, определяемую равенством $f(x) = |x| - 1$ при $-1 \leq x \leq 1$ в ряд Фурье.

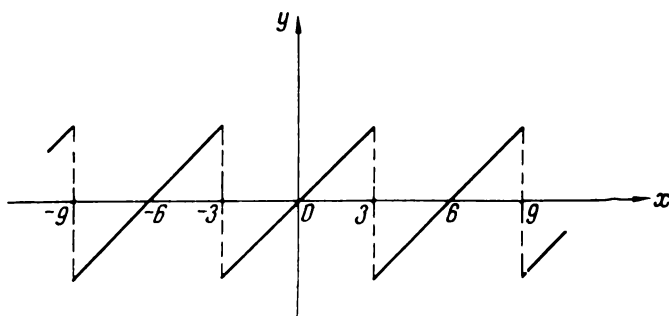
Решение. Функция четная, следовательно, $b_m = 0$ и

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx = 2 \int_0^1 (x-1) dx = (x-1)^2 \Big|_0^1 = -1; \\
 a_m &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{\pi mx}{l} dx = 2 \int_0^1 (x-1) \cos \pi mx dx = \\
 &= 2 \left[\frac{x-1}{\pi m} \sin \pi mx - \frac{1}{\pi m} \int \sin \pi mx dx \right]_0^1 = 2 \left[\frac{x-1}{\pi m} \sin \pi mx + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\pi^2 m^2} \cos \pi mx \right]_0^1 = \frac{2}{\pi^2} \cdot \frac{(-1)^m - 1}{m^2} = \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{(-1)^{2m-1}}{(2m-1)^2}.
 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$f(x) = -\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(2m-1)\pi x}{(2m-1)^2}.$$

Пример 3. Разложить в ряд Фурье с периодом $2l = 6$ функцию $f(x) = x - 6$ на отрезке $3 \leq x \leq 9$. График функции, периодически продолженной на всю ось, показан на рис. 39.



Р и с. 39

Решение.

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx = \frac{1}{3} \int_3^9 (x-6) dx = \frac{1}{6} [(x-6)^2]_3^9 = 0;$$

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{m\pi x}{l} dx = \frac{1}{3} \int_3^9 (x-6) \cos \frac{m\pi x}{3} dx = \\ &= \frac{1}{3} \left[\frac{3(x-6)}{m\pi} \sin \frac{m\pi x}{3} - \frac{3}{m\pi} \int \sin \frac{m\pi x}{3} dx \right]_3^9 = \\ &= \left[\frac{x-6}{m\pi} \sin \frac{m\pi x}{3} + \frac{3}{(m\pi)^2} \cos \frac{m\pi x}{3} \right]_3^9 = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_m &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{m\pi x}{l} dx = \frac{1}{3} \int_3^9 (x-6) \sin \frac{m\pi x}{3} dx = \\ &= \frac{1}{3} \left[-\frac{3(x-6)}{m\pi} \cos \frac{m\pi x}{3} + \frac{3}{m\pi} \int \cos \frac{m\pi x}{3} dx \right]_3^9 = \\ &= \left[-\frac{(x-6)}{m\pi} \cos \frac{m\pi x}{3} + \frac{3}{(m\pi)^2} \sin \frac{m\pi x}{3} \right]_3^9 = \\ &= -\frac{6 \cos m\pi}{m\pi} = \frac{6}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{m+1}}{m}. \end{aligned}$$

Итак,

$$f(x) = \frac{6}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} \sin \frac{m\pi x}{3}}{m}.$$

Опираясь на соотношение (2) и рис. 39, заданную функцию можно рассматривать на интервале $(-3, 3)$, тогда вычисления коэффициентов Фурье будут проще, а именно:

$$\begin{aligned} f(x) &= x, \quad -3 \leq x \leq 3, \\ a_0 &= 0, \quad a_m = 0, \\ b_m &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{m\pi x}{l} dx = \frac{2}{3} \int_0^3 x \sin \frac{m\pi x}{3} dx = \\ &= \frac{2}{3} \left[-\frac{3x}{m\pi} \cos \frac{m\pi x}{3} + \frac{3}{\pi^2 m^2} \sin \frac{m\pi x}{3} \right]_0^3 = \\ &= \frac{6}{m\pi} \cos m\pi = \frac{6}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{m+1}}{m}. \end{aligned}$$

§ 8. О разложении в ряд Фурье непериодических функций

До сих пор шла речь о разложении в ряд Фурье периодических функций. Покажем, что если непериодическая функция $f(x)$, заданная на интервале $(-l, l)$, удовлетворяет условиям теоремы разложимости (см. § 4), то ее также можно представить рядом Фурье. Для этого рассмотрим произвольную кусочногладкую функцию $\varphi(x)$ с периодом $2\mu \geq 2l$, которая совпадает на $(-l, l)$ с функцией $f(x)$ (рис. 40).

Разложим функцию $\varphi(x)$ в ряд Фурье. Сумма этого ряда во всех точках интервала $(-l, l)$ будет совпадать с $f(x)$ и вместе с тем $\varphi(x)$ периодически продолжена на всю ось x . В действительности разложение осуществляется без привлечения вспомогательной функции $\varphi(x)$ по формулам (22), в которые входит интервал $(-l, l)$.

На практике нередко функция $f(x)$ задается на интервале $(0, l)$. Дополняя определение этой функции на интервале $(-l, 0)$ по произволу, мы можем ее также разложить в ряд Фурье.

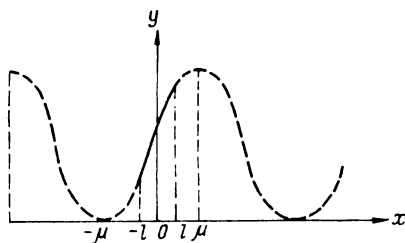


Рис. 40

Функция может быть определена так, чтобы при $-l \leq x < 0$ выполнялось $f(x) = f(-x)$, и в результате получится четная функция. В этом случае говорят, что функция продолжена с $(0, l)$ на $(-l, 0)$ четным образом (рис. 41, а).

Функция $f(x)$, продолженная четным образом, при разложении в ряд Фурье содержит только косинусы. Коэффициенты Фурье в этом случае вычисляются по формулам (22):

$$a_m = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{\pi m x}{l} dx \quad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

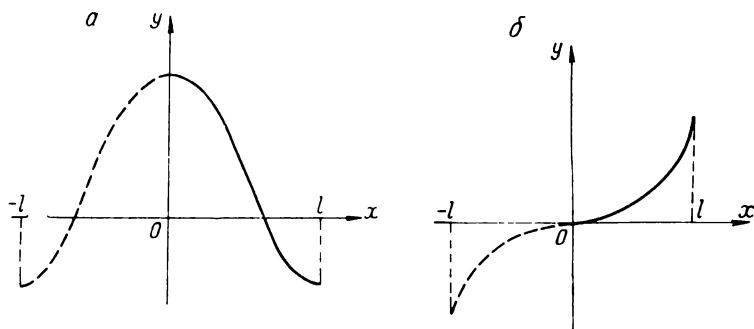


Рис. 41

Функция $f(x)$ на интервале $(-l, 0)$ может быть определена и так: $f(x) = -f(-x)$ (рис. 41, б). В этом случае говорят, что функция продолжена нечетным образом; при разложении в ряд Фурье она будет содержать только синусы. Тогда коэффициенты b_m определяются по формуле

$$b_m = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi m x}{l} dx \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Пример 1. Разложить в ряд Фурье функцию, определенную равенствами

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } \pi \leq x \leq 2\pi; \\ 1 & \text{при } 2\pi \leq x \leq 3\pi. \end{cases}$$

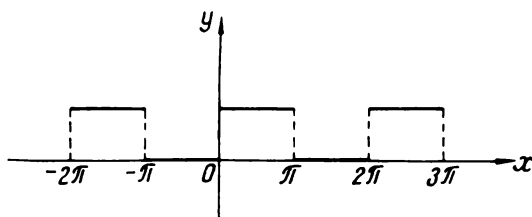
Решение. Функция задана на интервале длины $2l = 2\pi$. Периодически продолжив ее на всю ось x , получим функцию с периодом 2π (рис. 42).

Определим коэффициенты Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \cdot dx = 1;$$

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos mx dx = \frac{1}{\pi} \cdot \left| \frac{\sin mx}{m} \right|_0^{\pi} = 0;$$

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin mx dx = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\cos mx}{m} \right]_0^{\pi} = \\ = -\frac{1}{\pi} \cdot \frac{(-1)^m - 1}{m}.$$



Р и с. 42

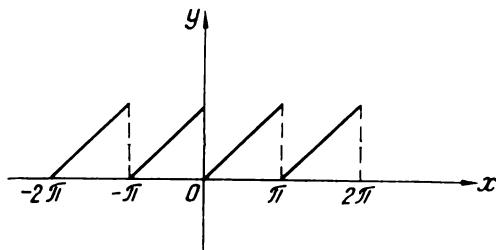
Запишем ряд Фурье для функции $f(x)$:

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(2m-1)x}{2m-1}.$$

В точках разрыва сумма ряда сходится к значению, равному $\frac{1}{2}$.

Пример 2. Разложить в ряд по косинусам функцию $f(x) = x$ ($0 \leq x \leq \pi$)

Решение. Для разложения $f(x)$ в ряд по косинусам продолжим ее на интервал $(-\pi, 0)$ четным образом. График функции с таким продолжением и последующим периодическим продолжением на ось x (по периоду 2π) показан на рис. 43.



Р и с. 43

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{x^2}{\pi} \Big|_0^{\pi} = \pi;$$

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos mx dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x \sin mx}{m} - \right. \\ \left. - \frac{1}{m} \int \sin mx dx \right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{m^2} \cos mx \right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi m^2} (\cos \pi m - \cos 0)$$

или

$$a_m = -\frac{2}{\pi} \left[\frac{1 - (-1)^m}{m^2} \right] = \begin{cases} -\frac{4}{\pi m^2} & \text{при } m \text{ нечетном,} \\ 0 & \text{при } m \text{ четном.} \end{cases}$$

Поэтому

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right).$$

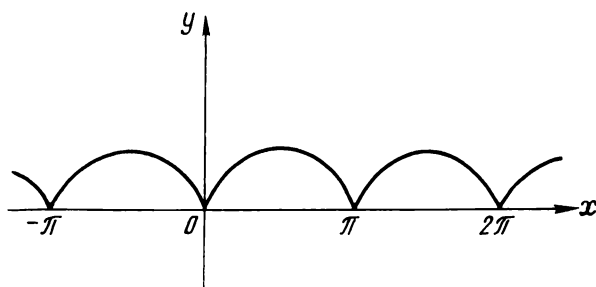
Получили такое же разложение, как в примере 2 (§ 6). Если бы заданная функция $f(x) = x$ была продолжена нечетным образом на $(-\pi, 0)$, то получили бы разложение ее по синусам, как в примере 1 (§ 6).

Пример 3. Функцию $f(x) = |\sin x|$ ($0 \leq x \leq \pi$) разложить по косинусам. График функции вместе с его четным продолжением на интервал $(-\pi, 0)$ и последующим продолжением на ось x приведен на рис. 44.

Решение. Функция непрерывна на всей оси x , четная, поэтому

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x dx = -\frac{2}{\pi} [\cos x]_0^{\pi} = \frac{4}{\pi};$$

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cdot \cos mx dx =$$



Р и с. 44

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin(1+m)x + \sin(1-m)x}{2} dx = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\cos(1+m)x}{1+m} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\cos(1-m)x}{1-m} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1 - \cos(1+m)\pi}{m+1} + \frac{1 - \cos(m-1)\pi}{1-m} \right] = \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1 - (-1)^{m+1}}{m+1} - \frac{1 - (-1)^{m-1}}{m-1} \right] = \frac{1}{\pi} \times \\
&\times \left[\frac{1 + (-1)^m}{m+1} - \frac{1 + (-1)(-1)^{m-1}}{m-1} \right] = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1 + (-1)^m}{m+1} - \frac{1 + (-1)^m}{m-1} \right] = \\
&= \frac{1}{\pi} \frac{1 + (-1)^m}{m^2 - 1} (m - 1 - m) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1 + (-1)^m}{m^2 - 1} \quad (m \neq 1).
\end{aligned}$$

Если $m = 1$, то

$$a_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos x dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\sin^2 x}{2} \Big|_0^{\pi} = 0.$$

Таким образом,

$$a_m = \begin{cases} 0 & \text{при } m \text{ нечетном,} \\ -\frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{m^2 - 1} & \text{при } m \text{ четном.} \end{cases}$$

Итак,

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos 2x}{3} + \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5 \cdot 7} + \dots \right).$$

Пример 4. Функцию $f(x)$, определенную равенством

$$f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{l} & \text{при } 0 \leq x \leq \frac{l}{2}, \\ 0 & \text{при } \frac{l}{2} < x \leq l, \end{cases}$$

разложить по косинусам. График функции вместе с ее четным продолжением на $(-l, 0)$ изображен на рис. 45.

Решение. Заданная функция четная, поэтому $b_m = 0$;

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l \cos \frac{\pi x}{l} dx = \frac{2}{l} \int_0^{\frac{l}{2}} \cos \frac{\pi x}{l} dx = \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi x}{l} \Big|_0^{\frac{l}{2}} = \frac{2}{\pi};$$

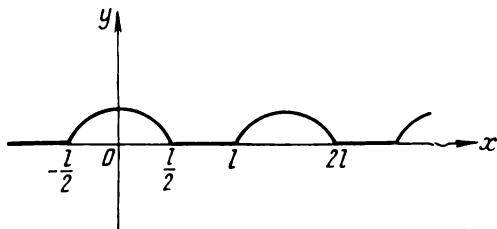


Рис. 45

$$\begin{aligned}
 a_m &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{m\pi x}{l} dx = \frac{2}{l} \int_0^{\frac{l}{2}} \cos \frac{\pi x}{l} \cos \frac{m\pi x}{l} dx = \\
 &= \frac{1}{l} \int_0^{\frac{l}{2}} \left[\cos \frac{(m+1)\pi}{l} x + \cos \frac{(m-1)\pi}{l} x \right] dx = \\
 &= \frac{1}{l} \left[\frac{l}{(m+1)\pi} \sin \frac{(m+1)\pi}{l} x + \frac{l}{(m-1)\pi} \sin \frac{(m-1)\pi}{l} x \right]_0^{\frac{l}{2}} = \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{m+1} \sin \frac{\pi(m+1)}{2} + \frac{1}{m-1} \sin \frac{\pi(m-1)}{2} \right] \quad (m \neq 1); \\
 a_2 &= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{1}{3} + 1 \right) = \frac{2}{3\pi}, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = -\frac{2}{15\pi}, \quad a_5 = 0, \\
 a_6 &= \frac{2}{35\pi}, \quad a_7 = 0, \quad a_8 = -\frac{2}{63\pi}; \\
 a_1 &= \frac{2}{l} \int_0^{\frac{l}{2}} \cos \frac{\pi x}{l} \cos \frac{\pi x}{l} dx = \frac{1}{l} \int_0^{\frac{l}{2}} \left(1 + \cos \frac{2\pi x}{l} \right) dx = \\
 &= \frac{1}{l} \left[x + \frac{l}{2\pi} \sin \frac{2\pi x}{l} \right]_0^{\frac{l}{2}} = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Итак,

$$f(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi x}{l} - \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{4m^2 - 1} \cos \frac{2m\pi x}{l}.$$

Пример 5. Разложить в ряд по синусам функцию, определенную равенством

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{при } 0 \leq x \leq \frac{l}{2}, \\ l - x & \text{при } \frac{l}{2} < x \leq l. \end{cases}$$

График функции вместе с ее продолжением на $(-l, 0)$ и последующим продолжением по периоду $2l$ на всю ось x показан на рис. 46.

Решение. Функция всюду непрерывная, нечетная. Поэтому

$$a_0 = 0, \quad a_m = 0;$$

$$b_m = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{m\pi x}{l} dx = \frac{2}{l} \int_0^{\frac{l}{2}} x \sin \frac{m\pi x}{l} dx +$$

$$+ \frac{2}{l} \int_{\frac{l}{2}}^l (l-x) \sin \frac{\pi m x}{l} dx.$$

Производя замену $\frac{\pi x}{l} = t$ и интегрируя по частям, найдем:

$$\begin{aligned} b_m &= \frac{2l}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin mt dt + \frac{2l}{\pi^2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\pi - t) \sin mtdt = \\ &= \frac{2l}{\pi^2} \left[-\frac{t \sin mt}{m} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2l}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos mtdt + \frac{2l}{\pi^2} \left[-\frac{(\pi - t) \cos mt}{m} \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \end{aligned}$$

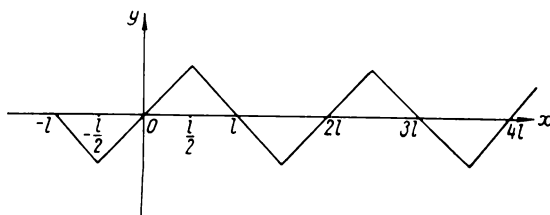


Рис. 46

$$+ \frac{2l}{\pi^2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos mtdt = \frac{4l}{\pi^2 m^2} \sin \frac{\pi m}{2} = \frac{4l}{\pi^2 m^2} (-1)^{m+1}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{4l}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(2m-1)^2} \sin \frac{(2m-1)\pi x}{l} = \frac{4l}{\pi^2} \left(\frac{\sin \frac{\pi x}{l}}{1} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sin \frac{3\pi x}{l}}{3^2} + \frac{\sin \frac{5\pi x}{l}}{5^2} - \dots \right). \end{aligned}$$

Полученный ряд сходится в каждой точке оси x к функции, изображенной на рис. 46.

§ 9. Комплексная форма ряда Фурье

Ряд Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mx + b_m \sin mx),$$

где

$$\left. \begin{aligned} a_m &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx & (m = 0, 1, 2, \dots), \\ b_m &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx & (m = 1, 2, \dots), \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

иногда бывает предпочтительнее представить с помощью формул Эйлера* в комплексной форме.

Формулы Эйлера

$$\cos mx = \frac{1}{2} (e^{imx} + e^{-imx}),$$

$$\sin mx = \frac{1}{2i} (e^{imx} - e^{-imx}) = \frac{i}{2} (e^{-imx} - e^{imx})$$

подставим в ряд (25), получим

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \frac{e^{imx} + e^{-imx}}{2} + ib_m \frac{e^{-imx} - e^{imx}}{2} \right) = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{a_m - ib_m}{2} e^{imx} + \frac{a_m + ib_m}{2} e^{-imx} \right). \end{aligned} \quad (27)$$

Заметим, что если в формулах (26) поменять m на $-m$, то коэффициент a_m сохранит знак, тогда как b_m изменит знак на противоположный, что символически можно записать так:

$$a_m = a_{-m}, \quad b_m = -b_{-m}.$$

Учитывая это замечание, выражение (27) можно записать

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m - ib_m}{2} e^{imx} + \sum_{m=-1}^{-\infty} \frac{a_m - ib_m}{2} e^{imx} = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{a_m - ib_m}{2} e^{imx} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{imx}, \end{aligned}$$

где $c_m = \frac{a_m - ib_m}{2}$.

Мы получили ряд Фурье в комплексной форме

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{imx}. \quad (28)$$

* Л. Эйлер (1707 — 1783) — знаменитый математик, механик и физик.

Чтобы найти коэффициенты c_m , умножим обе части (28) на $e^{-in.x}$ и проинтегрируем результат в пределах от $-\pi$ до π при фиксированном m ($m \neq n$):

$$\int_{-\pi}^{\pi} c_m e^{-in.x} e^{im.x} dx = c_m \frac{e^{i(m-n)x}}{(m-n)i} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \\ = \frac{c_m}{(m-n)i} [e^{i(m-n)\pi} - e^{-i(m-n)\pi}] = \frac{2c_m}{(m-n)} \sin \pi(m-n) = 0;$$

при $m = n$ интеграл равен $2c_m \pi$.

Таким образом, коэффициенты ряда (28) вычисляются по формуле

$$c_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-im.x} dx \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (29)$$

Для интервала $(-l, l)$ ряд Фурье в комплексной форме примет вид

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{\frac{im\pi x}{l}}, \quad (30)$$

где коэффициенты c_m находятся по формуле

$$c_m = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{\frac{-im\pi x}{l}} dx. \quad (31)$$

§ 10. Приближение функции с помощью тригонометрического многочлена. Неравенство Бесселя

Если в ряду Фурье некоторой функции $f(x)$ взять конечное число членов, то получим многочлен Фурье

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^n (a_m \cos mx + b_m \sin mx).$$

Можно сказать, что многочлен Фурье является приближенным представлением разлагаемой функции $f(x) \approx S_n(x)$.

Приближение будет тем лучше, чем больше взято членов ряда. На рис. 47 показано приближение функции, определяемой равенством

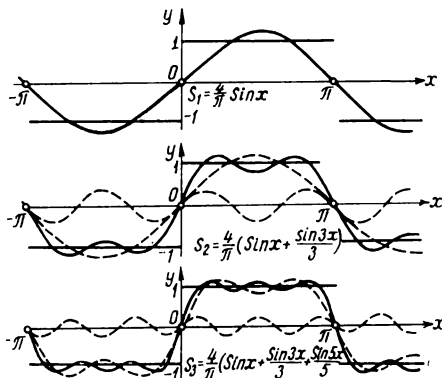
$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{при } -\pi \leq x < 0, \\ 1 & \text{при } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}.$$

с помощью одного и двух членов ряда Фурье.

Допустим, что функцию $f(x)$, заданную на интервале (a, b) , мы хотим заменить другой функцией $\varphi(x)$. При этой

замене важно знать величину ошибки приближенного равенства. Чаще всего за величину ошибки, за меру близости функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ принимают среднее квадратическое отклонение δ , определяемое равенством

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b [f(x) - \varphi(x)]^2 dx}.$$



Р и с. 47

Здесь мы решим одну экстремальную задачу. Пусть задана функция $f(x)$ с периодом 2π и тригонометрические многочлены n -го порядка

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^n (\alpha_m \cos mx + \beta_m \sin mx). \quad (32)$$

Среди всех тригонометрических многочленов (32) путем выбора коэффициентов α_m и β_m найти тот, для которого среднее квадратическое отклонение

$$\delta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 dx \quad (33)$$

достигает наименьшего значения. Таким образом, требуется найти минимум функции (32) с $2n+1$ переменными $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$.

Будем предполагать, что функция $f(x)$ с интегрируемым квадратом, т. е. существуют интегралы от $f(x)$ и $[f(x)]^2$.

В равенство (33) вместо $S_n(x)$ подставим правую часть (32) и развернем квадрат, стоящий под знаком интеграла,

$$\begin{aligned}
\delta_n^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ f(x) - \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^n (\alpha_m \cos mx + \beta_m \sin mx) \right] \right\}^2 dx = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ f^2(x) - 2f(x) \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^n (\alpha_m \cos mx + \beta_m \sin mx) \right] + \right. \\
&\quad \left. + \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^n (\alpha_m \cos mx + \beta_m \sin mx) \right]^2 \right\} dx = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \frac{a_0}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx - \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^n \alpha_m \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx - \\
&\quad - \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^n \beta_m \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx + \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{a_0^2}{4} \int_{-\pi}^{\pi} dx + \\
&\quad + \frac{a_0}{2\pi} \sum_{m=1}^n \alpha_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx dx + \frac{a_0}{2\pi} \sum_{m=1}^n \beta_m \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx dx + \\
&\quad + \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^n \alpha_m^2 \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx dx + \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^n \beta_m^2 \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx dx + \\
&\quad + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_m \alpha_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos kx dx + \\
&\quad + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_m \beta_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin kx dx + \\
&\quad + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^n \beta_m \beta_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin kx dx \quad (m \neq k).
\end{aligned}$$

Учитывая, что

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx,$$

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx$$

коэффициенты Фурье функции $f(x)$, а также

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx dx = \pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx dx = \pi$$

и при $m \neq k$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos kx dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin kx dx = 0,$$

получаем

$$\begin{aligned} \delta_n^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \frac{a_0 a_0}{2} - \sum_{m=1}^n (\alpha_m a_m + \beta_m b_m) + \frac{a_0^2}{4} + \\ + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n (\alpha_m^2 + \beta_m^2). \end{aligned}$$

Прибавим и вычтем сумму

$$\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n (\alpha_m^2 + \beta_m^2).$$

Получим:

$$\begin{aligned} \delta_n^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 dx - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n (\alpha_m^2 + \beta_m^2) + \\ + \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n (\alpha_m^2 + \beta_m^2) - \frac{a_0 a_0}{2} - \sum_{m=1}^n (\alpha_m a_m + \beta_m b_m) + \\ + \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n (\alpha_m^2 + \beta_m^2); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_n^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 dx - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n (\alpha_m^2 + \beta_m^2) + \\ + \frac{1}{4} (a_0 - a_0)^2 + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n [(\alpha_m - a_m)^2 + (\beta_m - b_m)^2]. \end{aligned}$$

Первые три слагаемые последнего равенства не зависят от $a_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n$; каждое из остальных слагаемых

$$\frac{1}{4} (a_0 - a_0)^2 + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n [(\alpha_m - a_m)^2 + (\beta_m - b_m)^2]$$

неотрицательно; их сумма достигает минимума, равного нулю, при $\alpha_0 = a_0$, $\alpha_1 = a_1$, ..., $\alpha_n = a_n$, $\beta_1 = b_1$, ..., $\beta_n = b_n$. При таком выборе коэффициентов α_i , β_i тригонометрический многочлен

$$S_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{m=1}^n (\alpha_m \cos mx + \beta_m \sin mx)$$

будет меньше всего отличаться от функции $f(x)$.

Итак, мы доказали, что среднее квадратическое отклонение функции $f(x)$ от тригонометрического многочлена порядка n окажется наименьшим в том случае, если коэффициенты этого многочлена будут коэффициентами Фурье функции $f(x)$.

Следовательно, наименьшая величина среднего квадратического отклонения определяется равенством

$$\delta_n^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 dx - \frac{1}{2} \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{m=1}^n (a_m^2 + b_m^2) \right]. \quad (34)$$

Так как $\delta_n^2 > 0$, то

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{m=1}^n (a_m^2 + b_m^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 dx$$

при любом n . В таком случае при $n \rightarrow \infty$ ряд

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m^2 + b_m^2), \quad (35)$$

составленный из квадратов коэффициентов Фурье, сходится и можно записать неравенство

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m^2 + b_m^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 dx, \quad (36)$$

которое называется *неравенством Бесселя*.

Из сходимости ряда (35) следует, что предел общего члена

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (a_m^2 + b_m^2) = 0,$$

т. е. $a_m \rightarrow 0$, $b_m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$.

При возрастании n величина δ_n^2 убывает, поскольку в (34) добавляются отрицательные слагаемые. Если $\delta_n^2 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то говорят, что многочлен Фурье $S_n(x)$ сходится к функции $f(x)$ «в среднем».

§ 11. Интеграл Фурье

Ранее нами было установлено, что всякая функция $f(x)$, удовлетворяющая на заданном интервале $(-l, l)$ условиям Дирихле, разлагается на этом интервале в тригонометрический ряд Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos \frac{m\pi x}{l} + b_m \sin \frac{m\pi x}{l} \right), \quad (37)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a_m &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos \frac{m\pi t}{l} dt & (m = 0, 1, 2, \dots), \\ b_m &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \sin \frac{m\pi t}{l} dt & (m = 1, 2, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

(для удобства переменная интегрирования обозначена буквой t).

Это разложение будет справедливым на всей оси x , если $f(x)$ — периодическая функция, и на интервале $(-l, l)$, если функция $f(x)$ непериодическая.

Рассмотрим непериодическую функцию $f(x)$ на интервале $(-l, l)$ в случае, когда интервал распространяется на всю ось x , т. е. при $l \rightarrow +\infty$. При переходе к пределу ряд Фурье превращается в интеграл Фурье. Если в ряду Фурье разложение функции $f(x)$ представляет сумму «гармонических колебаний», частоты которых образуют дискретную последовательность $\alpha_1 = \frac{\pi}{l}$, $\alpha_2 = \frac{2\pi}{l}$, ..., $\alpha_m = \frac{m\pi}{l}$, то разложение функции $f(x)$ в интеграл Фурье также представляет сумму «гармонических колебаний», однако частоты их заполняют непрерывно всю полуось $0 \leq l < \infty$.

Обратимся теперь к предельному переходу от ряда Фурье к интегралу Фурье. Будем предполагать, что функция $f(x)$ на всяком конечном промежутке оси x непрерывна и удовлетворяет условиям Дирихле. Пусть, кроме того, функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на всей оси x , т. е. существует несобственный интеграл от абсолютной величины этой функции, равный некоторому числу C :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = C.$$

Если подставим выражение для a_m и b_m из (38) в ряд (37), то получим

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \frac{1}{l} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\int_{-l}^l f(t) \cos \frac{m\pi t}{l} dt \right) \cos \frac{m\pi x}{l} + \\
&+ \left[\left(\int_{-l}^l f(t) \sin \frac{m\pi t}{l} dt \right) \sin \frac{m\pi x}{l} \right] = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \\
&+ \frac{1}{l} \sum_{m=1}^{\infty} \int_{-l}^l f(t) \left[\cos \frac{m\pi t}{l} \cos \frac{m\pi x}{l} + \sin \frac{m\pi t}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} \right] dt
\end{aligned}$$

или

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \frac{1}{l} \sum_{m=1}^{\infty} \int_{-l}^l f(t) \cos \frac{m\pi(t-x)}{l} dt. \quad (39)$$

Будем теперь неограниченно увеличивать l и посмотрим, какой вид примут слагаемые правой части (39).

Первое слагаемое, очевидно, обратится в нуль при $l \rightarrow \infty$:

$$\left| \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt \right| \leq \frac{1}{2l} \int_{-l}^l |f(t)| dt = \frac{C}{2l} \rightarrow 0.$$

Для выяснения предела второго слагаемого при $l \rightarrow \infty$ введем обозначения:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{\pi}{l}, \quad \alpha_2 = \frac{2\pi}{l}, \quad \dots, \quad \alpha_m = \frac{m\pi}{l}; \\
\Delta \alpha_m &= \alpha_{m+1} - \alpha_m = \frac{\pi}{l}.
\end{aligned} \quad (40)$$

Тогда второе слагаемое (39) может быть записано так:

$$\frac{1}{l} \sum_{m=1}^{\infty} \int_{-l}^l f(t) \cos \frac{m\pi(t-x)}{l} dt = \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \Delta \alpha_m \left[\int_{-l}^l f(t) \cos \alpha_m(t-x) dt \right].$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках, при фиксированном l можно рассматривать как функцию от α_m , а все выражение, которое находится под знаком суммы, напоминает интегральную сумму для функции от переменного α , составленную для интервала $(0, \infty)$. Поэтому естественно ожидать, что при $l \rightarrow \infty$ эта сумма будет стремиться к двойному интегралу

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \alpha(t-x) dt$$

и вместо формулы (39) получим

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \alpha (t-x) dt. \quad (41)$$

Равенство (41) называется *интегральной формулой Фурье*, а интеграл, стоящий в ее правой части, — *интегралом Фурье*. Строгое доказательство полученной формулы мы не приводим. Как видно, интеграл Фурье есть двукратный интеграл от функции двух аргументов α и t и зависит еще от параметра x .

Формула (41) справедлива для всех точек, где функция $f(x)$ непрерывна; в точках разрыва первого рода интеграл Фурье равен

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \alpha (t-x) dt = \frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2},$$

где x_0 — точка разрыва.

Интеграл Фурье (41) можно записать и в другой форме. Раскроем косинус разности

$$\cos \alpha (t-x) = \cos \alpha t \cos \alpha x + \sin \alpha t \sin \alpha x.$$

Подставив правую часть последнего равенства в (41), получим

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \alpha x d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \alpha t dt + \\ + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \sin \alpha x d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \alpha t dt. \end{aligned} \quad (42)$$

Внутренние интегралы являются функциями от α ; обозначим их через $A(\alpha)$ и $B(\alpha)$:

$$A(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \alpha t dt; \quad B(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \alpha t dt.$$

Каждый из этих интегралов на интервале $(-\infty, \infty)$ сходится, так как функция $f(t)$ по условию абсолютно интегрируема, следовательно, интегрируемы функции $f(t) \cos \alpha t$ и $f(t) \sin \alpha t$.

Интеграл Фурье (42) в новых обозначениях запишется:

$$f(x) = \int_0^{\infty} [A(\alpha) \cos \alpha x + B(\alpha) \sin \alpha x] d\alpha. \quad (43)$$

Таким образом, интеграл Фурье (41) или (43) дает разложение функции $f(x)$ в интервале $(-\infty, \infty)$ на гармонические колебания с частотами α , непрерывно изменяющимися от 0 до ∞ , или, как говорят, имеет непрерывный спектр*.

§ 12. Интеграл Фурье для четных и нечетных функций

Обратимся к формуле (42):

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \alpha x d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \alpha t dt + \\ + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \sin \alpha x d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \alpha t dt.$$

Пусть функция $f(x)$ четная. Тогда $f(t) \cos \alpha t$ также четная, а $f(t) \sin \alpha t$ нечетная и, следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \alpha t dt = 2 \int_0^{\infty} f(t) \cos \alpha t dt, \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \alpha t dt = 0.$$

В этом случае формула (42) примет вид

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \alpha x d\alpha \int_0^{\infty} f(t) \cos \alpha t dt. \quad (44)$$

Пусть теперь $f(x)$ — нечетная. В этом случае $f(t) \cos \alpha t$ — функция нечетная, а $f(t) \sin \alpha t$ — четная, и мы получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \alpha t dt = 0; \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \alpha t dt = 2 \int_0^{\infty} f(t) \sin \alpha t dt.$$

Формула (42) для нечетной функции $f(x)$ запишется так:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin \alpha x d\alpha \int_0^{\infty} f(t) \sin \alpha t dt. \quad (45)$$

Если функция определена только на интервале $(0, \infty)$, то ее можно продолжить на интервал $(-\infty, 0)$ как четным, так и не-

* Зависимость амплитуды от частоты называется *амплитудным спектром* функции.

четным образом, а значит, представить различными интегралами Фурье — формулами (44) или (45).

В точках разрыва функции левые части равенств (44) и (45) нужно заменить на $\frac{f(x_1+0) + f(x-0)}{2}$, т. е. интегралы Фурье будут:

1) для четной функции

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \alpha x d\alpha \int_0^{\infty} f(t) \cos \alpha t dt; \quad (46)$$

2) для нечетной функции

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin \alpha x d\alpha \int_0^{\infty} f(t) \sin \alpha t dt. \quad (47)$$

Возвратимся к формуле (44). Если положить

$$\varphi(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos \alpha t dt, \quad (48)$$

то формула (44) примет вид

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \varphi(\alpha) \cos \alpha x d\alpha. \quad (49)$$

Функция $\varphi(\alpha)$ называется *косинус-преобразованием* для функции $f(x)$. Если в выражении (48) считать, что $\varphi(\alpha)$ заданная, а $f(t)$ — искомая функция, то оно является интегральным уравнением для функции $\varphi(\alpha)$ и она находится из (49).

Если положить в (45)

$$\psi(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin \alpha t dt, \quad (50)$$

то из (45) следует, что

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \psi(\alpha) \sin \alpha x d\alpha. \quad (51)$$

Функцию $\psi(\alpha)$ называют *синус-преобразованием* Фурье. Синус- и косинус-преобразования Фурье находят широкое применение в различного рода задачах математической физики.

Пример 1. Представить интегралом Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } |x| < 1, \\ \frac{1}{2} & \text{при } |x| = 1, \\ 0 & \text{при } |x| > 1. \end{cases}$$

Решение. Учитывая, что функция $f(x)$ — четная, на основании формулы (44) имеем

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \alpha x d\alpha \int_0^{\infty} f(t) \cos \alpha t dt = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \alpha x d\alpha \int_0^1 \cos \alpha t dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha x \sin \alpha}{\alpha} d\alpha, \end{aligned}$$

так как

$$\int_0^1 \cos \alpha t dt = \frac{\sin \alpha}{\alpha}.$$

Следовательно,

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha x \sin \alpha}{\alpha} d\alpha = \begin{cases} 1 & \text{при } |x| < 1, \\ \frac{1}{2} & \text{при } |x| = 1, \\ 0 & \text{при } |x| > 1. \end{cases} \quad (52)$$

Выражение (52) называется *разрывным множителем Дирихле*. В частности, при $x=0$ получим

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha}{\alpha} d\alpha = 1$$

или

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha}{\alpha} d\alpha = \frac{\pi}{2}.$$

Мы вычислили интеграл, который обычным способом интегрирования через элементарные функции не выражается.

Пример 2. Представить интегралом Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 < x < a, \\ -1 & \text{при } -a < x < 0, \\ 0 & \text{при } |x| > a. \end{cases}$$

Решение. Заданная функция нечетная, поэтому воспользуемся формулой (45)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin \alpha x d\alpha \int_0^{\infty} f(t) \sin \alpha t dt = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin \alpha x d\alpha \int_0^a 1 \cdot \sin \alpha t dt = \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin \alpha x \left[-\frac{\cos \alpha t}{\alpha} \right]_0^a d\alpha = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{\alpha} (1 - \cos \alpha a) d\alpha.$$

Следовательно,

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} (1 - \cos \alpha a) \frac{\sin \alpha x}{\alpha} d\alpha = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 < x < a, \\ -1 & \text{при } -a < x < 0, \\ 0 & \text{при } |x| > a. \end{cases}$$

Пример 3. Представить интегралом Фурье функцию

$f(x) = e^{-\beta x}$ ($0 < x < \infty$, $\beta > 0$), продолжив ее четным и нечетным образом.

Решение. Так как функция определена на $(0, \infty)$, то продолжив ее на интервал $(-\infty, 0)$ четным образом, можем применить формулу (44)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \alpha x d\alpha \int_0^{\infty} f(t) \cos \alpha t dt = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \alpha x d\alpha \int_0^{\infty} e^{-\beta t} \cos \alpha t dt. \end{aligned}$$

Рассмотрим интеграл

$$\int_0^{\infty} e^{-\beta t} \cos \alpha t dt.$$

Интегрируя его по частям, получим

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \int_0^{\varepsilon} e^{-\beta t} \cos \alpha t dt &= \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \left[e^{-\beta t} \frac{\sin \alpha t}{\alpha} \right]_0^{\varepsilon} + \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{\beta}{\alpha} \int_0^{\varepsilon} e^{-\beta t} \sin \alpha t dt = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} e^{-\beta \varepsilon} \frac{\sin \alpha \varepsilon}{\alpha} - \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{\beta}{\alpha^2} \left[e^{-\beta t} \cos \alpha t \right]_0^{\varepsilon} - \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{\beta^2}{\alpha^2} \int_0^{\varepsilon} e^{-\beta t} \cos \alpha t dt; \\ \left(1 + \frac{\beta^2}{\alpha^2} \right) \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \int_0^{\varepsilon} e^{-\beta t} \cos \alpha t dt &= \frac{\beta}{\alpha^2}. \end{aligned}$$

Из последнего выражения находим

$$\int_0^{\infty} e^{-\beta t} \cos \alpha t dt = \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Окончательно

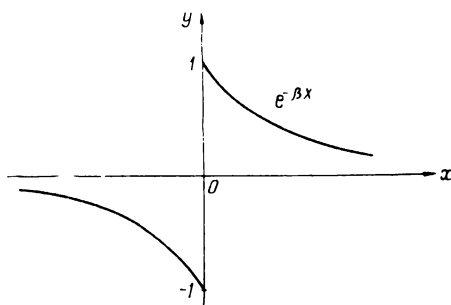
$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \alpha x d\alpha \int_0^{\infty} e^{-\beta t} \cos \alpha t dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \cos \alpha x d\alpha.$$

Продолжив функцию $e^{-\beta x}$ на интервал $(-\infty, 0)$ нечетным образом и интегрируя по частям, получим

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin \alpha x d\alpha \int_0^{\infty} e^{-\beta t} \sin \alpha t dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} \sin \alpha x d\alpha.$$

При нечетном продолжении точка $x=0$ есть точка разрыва. И хотя $f(0)=1$, в действительности значение интеграла здесь будет равно полусумме значений справа и слева от точки $x=0$, т. е. нулю (рис. 48).

Пример 4. Представить интегралом Фурье функцию



Р и с. 48

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{при } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{при } x > 1, \end{cases}$$

продолжив ее нечетным образом на отрицательную полуось.

Решение. Воспользуемся формулой (45)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin \alpha x d\alpha \int_0^{\infty} f(t) \sin \alpha t dt = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin \alpha x d\alpha \int_0^{\infty} (t-1) \sin \alpha t dt = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin \alpha x \left[\frac{\cos \alpha t}{\alpha} (1-t) + \frac{\sin \alpha}{\alpha^2} \right]_0^1 d\alpha = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin \alpha x \left(-\frac{1}{\alpha} + \frac{\sin \alpha}{\alpha^2} \right) d\alpha. \end{aligned}$$

Итак,

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha - \alpha}{\alpha^2} \sin \alpha x d\alpha.$$

Пример 5. Представить интегралом Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cos x & \text{при } 0 \leq x < \pi, \\ -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} & \text{при } x = \pi, \\ 0 & \text{при } x > \pi, \end{cases}$$

продолжив ее нечетным образом на отрицательную полуось.

Решение. Функция кусочногладкая, имеет разрыв первого рода в точке $x = \pi$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin \alpha x d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \alpha t dt = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin \alpha x d\alpha \int_0^{\pi} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin \alpha t dt = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \sin \alpha x d\alpha \int_0^{\pi} \frac{1}{2} [\sin(\alpha - 1)t + \sin(\alpha + 1)t] dt. \end{aligned}$$

Вычислим внутренний интеграл:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^{\pi} [\sin(\alpha - 1)t + \sin(\alpha + 1)t] dt &= \frac{1}{2} \left[\frac{\cos(\alpha - 1)t}{1 - \alpha} - \right. \\ &- \left. \frac{\cos(\alpha + 1)t}{1 + \alpha} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{2} \left[\frac{\cos(\alpha - 1)\pi}{1 - \alpha} - \frac{1}{1 - \alpha} - \frac{\cos(\alpha + 1)\pi}{1 + \alpha} + \frac{1}{1 + \alpha} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\cos(\alpha - 1)\pi}{1 - \alpha} - \frac{\cos(\alpha + 1)\pi}{1 + \alpha} - \frac{2\alpha}{1 - \alpha^2} \right] = \frac{1}{2} \left[-\frac{\cos \alpha \pi}{1 - \alpha} - \right. \\ &- \left. \frac{2\alpha}{1 - \alpha^2} + \frac{\cos \alpha \pi}{1 + \alpha} \right] = \frac{1}{2} \left[\cos \alpha \pi \cdot \frac{2\alpha}{\alpha^2 - 1} + \frac{2\alpha}{\alpha^2 - 1} \right] = \\ &= \frac{\alpha}{\alpha^2 - 1} (\cos \alpha \pi + 1). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\alpha}{\alpha^2 - 1} (\cos \alpha \pi + 1) \sin \alpha x d\alpha.$$

Пример 6. Пусть $f(x) = e^{-ax}$ ($a > 0$, $x \geq 0$).

Решение. Найдём косинус-преобразование Фурье. Воспользовавшись (48) и интегрируя по частям, получим

$$\varphi(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-at} \cos x t dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + x^2};$$

синус-преобразование найдем по формуле (50)

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-at} \sin x t dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{x}{a^2 + x^2}.$$

Так как e^{-ax} интегрируема на интервале $(0, \infty)$, то по формулам (49) и (51)

$$\frac{2a}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos x t}{a^2 + t^2} dt = e^{-ax} \quad (x \geq 0)$$

и

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{x \sin x t}{a^2 + t^2} dt = e^{-ax} \quad (x > 0)$$

или

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x t}{a^2 + t^2} dt = \frac{\pi}{2a} e^{-ax}, \quad \int_0^{\infty} \frac{x \sin x t}{a^2 + t^2} dt = \frac{\pi}{2} e^{-ax}.$$

Последние два равенства называются *интегралами Лапласа*.

§ 13. Интеграл Фурье в комплексной форме

Обратимся к формуле (43) § 11

$$f(x) = \int_0^{\infty} [A(x) \cos x t + B(x) \sin x t] dt, \quad (43)$$

где

$$A(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos x t dt,$$

$$B(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin x t dt.$$

Преобразуем подынтегральное выражение формулы (43) с помощью формул Эйлера

$$f(x) = \int_0^{\infty} \left[A(x) \frac{e^{i x t} + e^{-i x t}}{2} + B(x) \frac{e^{i x t} - e^{-i x t}}{2} \right] dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left\{ [A(\alpha) - iB(\alpha)] e^{i\alpha x} + [A(\alpha) + iB(\alpha)] e^{-i\alpha x} \right\} d\alpha. \quad (53)$$

Введем обозначения

$$F(\alpha) = \pi [A(\alpha) - iB(\alpha)],$$

$$\bar{F}(\alpha) = \pi [A(\alpha) + iB(\alpha)]$$

и тогда, подставляя вместо $A(\alpha)$ и $B(\alpha)$ их значения, получим

$$\left. \begin{aligned} F(\alpha) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) (\cos \alpha t - i \sin \alpha t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\alpha t} dt, \\ \bar{F}(\alpha) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) (\cos \alpha t + i \sin \alpha t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\alpha t} dt. \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

Обозначив $\bar{F}(\alpha) = F(-\alpha)$, выражения (54) мы можем рассматривать как функцию от α и для положительных и для отрицательных значений α .

Если подставим $F(\alpha)$ в интеграл Фурье (53), то получим

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} [F(\alpha) e^{i\alpha x} + F(-\alpha) e^{-i\alpha x}] d\alpha = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^{\infty} F(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha + \int_0^{\infty} F(-\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha \right\} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^{\infty} F(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha + \int_{-\infty}^0 F(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha \right\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha, \end{aligned}$$

так как после замены α на $-\alpha$

$$\int_0^{\infty} F(-\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha = \int_{-\infty}^0 F(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha.$$

Итак, мы получили

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha, \quad (55)$$

где

$$F(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\alpha t} d\alpha. \quad (56)$$

Функция $F(\alpha)$, определенная формулой (56), называется *преобразованием Фурье* для функции $f(t)$. Функция $f(x)$, определенная формулой (55), называется *интегралом Фурье*

для функции $F(\alpha)$. Иногда комплексную функцию $F(\alpha)$ называют *спектральной функцией* или *спектральной характеристикой*. Модуль комплексной функции $|F(\alpha)|$ называется *амплитудным спектром*.

Каждое из равенств (55) или (56) можно рассматривать как интегральное уравнение, в котором функция вне интеграла задана, а под знаком интеграла разыскивается.

Пример 1. Найти спектральную функцию (преобразование Фурье), если

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } |x| < 1, \\ 0 & \text{при } |x| > 1. \end{cases}$$

Решение. По формуле (56) находим

$$\begin{aligned} F(\alpha) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\alpha t} dt = \int_{-1}^1 1 \cdot e^{-i\alpha t} dt = \left[\frac{e^{-i\alpha t}}{-i\alpha} \right]_{-1}^1 = \\ &= \frac{e^{-i\alpha} - e^{i\alpha}}{-i\alpha} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{i} = \frac{2}{\alpha} \sin \alpha. \end{aligned}$$

Пример 2. Найти спектральную функцию и амплитудный спектр

$$f(x) = \begin{cases} e^{-ax} & \text{при } x > 0, \ a > 0; \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Решение. Находим спектральную функцию $F(\alpha)$:

$$\begin{aligned} F(\alpha) &= \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-i\alpha t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+i\alpha)t} dt = \\ &= - \left[\frac{e^{-(a+i\alpha)t}}{a+i\alpha} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{a+i\alpha}. \end{aligned}$$

Амплитудный спектр

$$|F(\alpha)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \alpha^2}}.$$

Пример 3. Представить интегралом Фурье в комплексной форме, найти спектральную функцию и амплитудный спектр, если

$$f(x) = \begin{cases} e^{-ax} \sin \omega x & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Решение. По формуле (56) находим спектральную функцию $F(\alpha)$ (учитывая, что при $x < 0$ $f(x) = 0$)

$$\begin{aligned} F(\alpha) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\alpha t} dt = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-i\alpha t} \sin \omega t dt = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-t(a+i\alpha)} \sin \omega t dt. \end{aligned}$$

Для решения последнего интеграла воспользуемся формулой интегрального исчисления

$$\int e^{ax} \sin nx dx = \frac{e^{ax} (a \sin nx - n \cos nx)}{a^2 + n^2} + C.$$

Тогда

$$F(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-t(a+ix)} \sin \omega t dt = \\ = \frac{e^{-t(a+ix)} [(a+ix) \sin \omega t + \omega \cos \omega t]}{(a+ix)^2 + \omega^2} \Big|_0^{\infty} = \frac{\omega}{(a+ix)^2 + \omega^2}.$$

Итак,

$$F(\alpha) = \frac{\omega}{(a+ix)^2 + \omega^2} = \frac{\omega}{a^2 + \omega^2 - \alpha^2 + 2a\alpha i}.$$

Амплитудный спектр

$$|F(\alpha)| = \frac{\omega}{\sqrt{(a^2 + \omega^2 - \alpha^2)^2 + (2a\alpha)^2}} = \frac{\omega}{\sqrt{(a^2 + \omega^2)^2 + \alpha^4 - 2\alpha^2(\omega^2 + 3a^2)}}.$$

Интеграл Фурье в комплексной форме

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega}{(a+ix)^2 + \omega^2} e^{i\alpha x} d\alpha;$$

$$f(x) = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{(a+ix)^2 + \omega^2} d\alpha.$$

Пример 4. Найти преобразование Фурье для функции

$$f(x) = \begin{cases} -x+1 & \text{при } 0 \leq x \leq 1, \\ x+1 & \text{при } -1 \leq x < 0, \\ 0 & \text{при } |x| > 1. \end{cases}$$

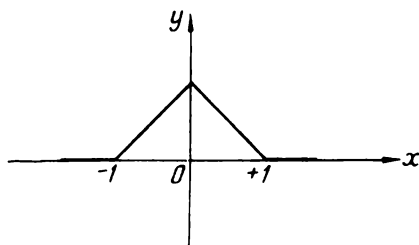


Рис. 49

Решение. Для того чтобы найти преобразование Фурье

$$F(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\alpha t} dt,$$

промежуток интегрирования разобьем на отдельные интервалы $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$ и $(1, \infty)$, тогда

$$F(\alpha) = \int_{-\infty}^{-1} 0 \cdot e^{-i\alpha t} dt + \int_{-1}^0 (t+1) e^{-i\alpha t} dt + \int_0^1 (-t+1) e^{-i\alpha t} dt +$$

$$+ \int_1^{\infty} 0 \cdot e^{-i \alpha t} dt.$$

Первый и последний интегралы правой суммы, очевидно, равны нулю. Остальные интегралы, которые соответственно обозначим через I_1 и I_2 , проинтегрируем по частям:

$$I_1 = \int_{-1}^0 (t+1) e^{-i \alpha t} dt = \left[\frac{(t+1) e^{-i \alpha t}}{-i \alpha} \right]_{-1}^0 + \frac{1}{i \alpha} \int_{-1}^0 e^{-i \alpha t} dt =$$

$$= -\frac{1}{i \alpha} + \left[\frac{e^{-i \alpha t}}{\alpha^2} \right]_{-1}^0 = -\frac{1}{i \alpha} + \frac{1}{\alpha^2} - \frac{e^{i \alpha}}{\alpha^2};$$

$$I_2 = \int_0^1 (-t+1) e^{-i \alpha t} dt = \left[\frac{t-1}{i \alpha} e^{-i \alpha t} - \frac{e^{-i \alpha t}}{\alpha^2} \right]_0^1 = \frac{1}{i \alpha} - \frac{e^{-i \alpha}}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^2}.$$

Следовательно,

$$F(\alpha) = I_1 + I_2 = -\frac{1}{i \alpha} + \frac{1}{\alpha^2} - \frac{e^{i \alpha}}{\alpha^2} + \frac{1}{i \alpha} - \frac{e^{-i \alpha}}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^2} =$$

$$= \frac{2}{\alpha^2} - \frac{e^{i \alpha} + e^{-i \alpha}}{\alpha^2}.$$

Применяя к последнему слагаемому формулы Эйлера, находим

$$F(\alpha) = \frac{2}{\alpha^2} - \frac{2 \cos \alpha}{\alpha^2} = \frac{2(1 - \cos \alpha)}{\alpha^2} = \frac{2 \cdot 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\alpha^2}.$$

Окончательно

$$F(\alpha) = \frac{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\alpha^2}.$$

Понятие об уравнениях математической физики

Многие задачи физики и техники приводят к дифференциальным уравнениям с частными производными. *Дифференциальным уравнением с частными производными* называется уравнение, связывающее неизвестную функцию $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, независимые переменные x_1, x_2, \dots, x_n и частные производные от неизвестной функции. Порядок старшей частной производной, входящей в уравнение, называется *порядком уравнения* с частными производными. *Решением* уравнения с частными производными называется всякая функция $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, которая, будучи подставлена в уравнение вместо неизвестной функции, обращает это уравнение в тождество.

Дифференциальные уравнения с частными производными получили название уравнений математической физики. Теория таких уравнений находит многочисленные применения.

§ 1. Основные уравнения математической физики

Основными уравнениями математической физики (для случая функций двух независимых переменных) являются *волновое уравнение*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (1)$$

уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2)$$

и уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (3)$$

Различные физические процессы могут описываться одинаковыми дифференциальными уравнениями. Так, например, уравнение (1) описывает процессы малых поперечных колебаний струны, продольных колебаний стержня, электрических колебаний в проводах и многие другие. Именно поэтому изучение основных уравнений математической физики представляет большой практический интерес.

§ 2. Вывод основных уравнений математической физики

1. Уравнение колебаний струны. В математической физике *струной* называют гибкую упругую нить, не оказывающую сопротивления изгибу.

Рассмотрим натянутую струну, которая в начальный момент совмещена с отрезком $0 \leq x \leq l$ оси x . Будем считать, что концы струны $x = 0$ и $x = l$ закреплены. Если теперь струну отклонить от первоначального положения и предоставить самой себе, то она начнет колебаться. Наша задача состоит в исследовании этих колебаний.

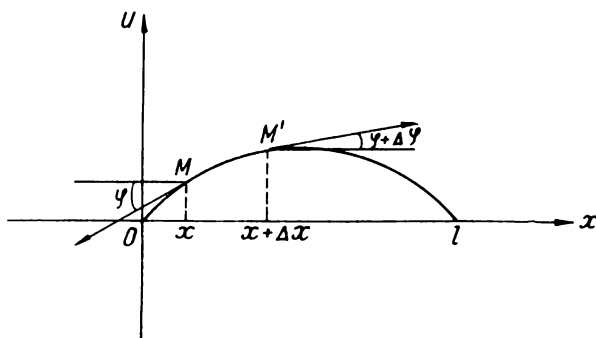


Рис. 50

Сделаем ряд допущений. Будем считать, что колебания струны происходят в плоскости (x, u) и что отклонения точек струны от Ox малы настолько, что увеличением ее длины в процессе колебаний можно пренебречь. Такие колебания струны будут описываться функцией $u(x, t)$, где u — отклонение точки струны с абсциссой x в момент времени t . Тогда натяжение T остается одним и тем же во всех точках струны. Струну же будем считать однородной, имеющей постоянную линейную плотность ρ .

Пусть в некоторый момент времени t струна имеет конфигурацию, изображенную на рис. 50. Выделим элемент струны

$$ds = \widehat{MM'}.$$

На концах этого элемента по касательным к нему действуют силы натяжения, величина каждой из которых равна T . Его масса равна $\rho ds = \rho dx$, так как, пренебрегая увеличением длины струны, можно считать, что $ds \approx dx$.

Пусть касательные к элементу ds струны образуют с осью x углы φ и $\varphi + \Delta\varphi$. Так как $ds \approx dx$, то углы φ и $\varphi + \Delta\varphi$ малы, и поэтому можно считать, что

$$\sin \varphi \approx \operatorname{tg} \varphi \approx \varphi \text{ и } \sin(\varphi + \Delta\varphi) \approx \operatorname{tg}(\varphi + \Delta\varphi) \approx \varphi + \Delta\varphi.$$

На основании второго закона Ньютона ($F = ma$) уравнение движения элемента ds струны под действием приложенных к нему сил имеет вид

$$(\rho dx) \mathbf{a} = \mathbf{R}, \quad (4)$$

где \mathbf{a} — ускорение элемента, а \mathbf{R} — равнодействующая сил, приложенных к его концам.

Проектируя векторы \mathbf{a} и \mathbf{R} на ось u и пользуясь уравнением (4), получим

$$R_u = (\rho dx) a_u. \quad (5)$$

Так как

$$R_u = T \sin(\varphi + \Delta\varphi) - T \sin \varphi \approx T(\varphi + \Delta\varphi) - T\varphi = T\Delta\varphi$$

и ускорение

$$a_u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

то из уравнения (5) получим

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx = T d\varphi. \quad (6)$$

Но

$$\operatorname{tg} \varphi = u'_x = \frac{\partial u}{\partial x};$$

тогда

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\partial u}{\partial x}$$

и

$$d\varphi = \frac{1}{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx.$$

Здесь мы пренебрегли величиной $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$ — бесконечно малой по сравнению с единицей, что следует из допущения $ds \approx dx$. Действительно, если

$$ds = \int_x^{x+\Delta x} \sqrt{1 + u'^2_x} dx \approx dx,$$

то

$$\sqrt{1 + u'^2_x} \approx 1.$$

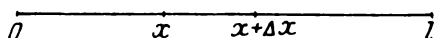
Подставляя значения ds в уравнение (6), получим

$$\rho^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx.$$

Сокращая на dx и обозначая $\frac{T}{\rho} = a^2$, получаем уравнение движения струны:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (7)$$

2. Уравнение распространения тепла в стержне. Пусть однородный стержень помещен в теплоизолирующую оболочку и нагрет так, что температура в различных его поперечных сечениях различна. Если прекратить нагревание этого стержня, в нем начнет происходить процесс выравнивания температур: тепло станет распространяться от более нагретых мест к менее нагретым. Этот процесс будет описываться функцией $u(x, t)$, где u — температура точек поперечного сечения с абсциссой x в момент времени t .



Р и с. 51

Рассмотрим сечение x (рис. 51) нашего стержня и найдем количество теплоты, протекающее через это сечение за элементарный промежуток времени dt . В момент t температура стержня в точке x будет $u(x, t)$, а в точке $x + \Delta x$ температура в этот момент будет $u(x + \Delta x, t)$. Разность

$$u(x, t) - u(x + \Delta x, t)$$

дает падение температуры при перемещении из точки x в точку $x + \Delta x$. Тогда отношение

$$\frac{u(x, t) - u(x + \Delta x, t)}{\Delta x}$$

дает падение температуры на единицу длины стержня. Если Δx мало, то это отношение можно считать равным $-\frac{\partial u}{\partial x}$. Пусть k — коэффициент теплопроводности, т. е. количество теплоты, которое будет протекать за единицу времени через сечение стержня, если температура стержня падает на 1° при перемещении вдоль стержня на единицу длины. Тогда, если на единицу длины стержня на участке $[x, x + \Delta x]$ приходится падение температуры $-\frac{\partial u}{\partial x}$, то за единицу времени через сечение x пройдет количество теплоты, равное $-k \frac{\partial u}{\partial x}$ кал. За время же dt (от момента времени t до момента $t + \Delta t$) через сечение x перейдет (слева направо)

$$Q = -k \frac{\partial u}{\partial x} dt \text{ кал.}$$

Выделим теперь элементарный отрезок $[x, x + \Delta x]$ стержня. За время $(t, t + \Delta t)$ в наш отрезок войдет через сечение x из левой части стержня

$$Q_1 = -ku'_x(x, t)dt \text{ кал.}$$

За это же время из нашего отрезка через сечение $x + \Delta x$ уйдет направо

$$Q_2 = -ku'_x(x + \Delta x, t)dt \text{ кал.}$$

Таким образом, за время dt рассматриваемый элементарный участок стержня $[x, x + \Delta x]$ получит

$$\Delta Q = Q_1 - Q_2 = k[u'_x(x + \Delta x, t) - u'_x(x, t)]dt \text{ кал.}$$

Так как

$$u'_x(x + \Delta x, t) - u'_x(x, t) = u''_{xx}(x, t)dx,$$

то

$$\Delta Q = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx dt.$$

Если c — удельная теплоемкость стержня, то получение

$$\Delta Q = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx dt \text{ кал}$$

теплоты повысит температуру единицы массы стержня на

$$\frac{k}{c} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx dt \text{ град.}$$

Вследствие того, что масса отрезка $[x, x + \Delta x]$ стержня равна ρdx , где ρ — линейная плотность стержня, которую мы будем считать постоянной, температура этого отрезка при получении им ΔQ калорий теплоты повысится на

$$\frac{k}{c\rho} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dt \text{ град.}$$

С другой стороны, это повышение температуры стержня в точке x за время dt равно

$$u(x, t + \Delta t) - u(x, t) = \frac{\partial u}{\partial t} dt.$$

Таким образом, мы получим равенство

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{c\rho} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dt.$$

Сокращая на dt и обозначая $\frac{k}{c\rho} = a^2$, получим уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (8)$$

3. Уравнение потенциального течения жидкости. Рассмотрим плоскопараллельное течение жидкости в некоторой пространственной области ω .

Течение называется *плоскопараллельным*, если картина течения одинакова во всех плоскостях, параллельных заданной плоскости, например плоскости xy (течение не зависит от координаты z). В таком случае

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y),$$

где $\mathbf{v}(x, y)$ — поле скоростей текущей жидкости.

Поскольку течение жидкости потенциальное, то вектор скорости $\mathbf{v}(x, y)$ является потенциальным вектором, т. е.

$$\mathbf{v} = \text{grad } u(x, y), \quad (9)$$

где $u = u(x, y)$ — потенциальная функция поля скоростей.

Если в области ω отсутствуют источники и стоки жидкости, то

$$\text{div } \mathbf{v} = 0. \quad (10)$$

Из (9) и (10) следует, что

$$\text{div grad } u(x, y) = 0$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (11)$$

Таким образом, плоское установившееся потенциальное течение несжимаемой жидкости (плотность $\rho = \text{const}$) без источников и стоков описывается уравнением (11), которое называется уравнением Лапласа.

§ 3. Начальные и граничные условия

Уравнения (1) — (3) имеют бесконечное множество решений. Так, например, любая функция вида

$$u = \varphi(x - at) + \psi(x + at),$$

где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ — дважды дифференцируемые функции, является решением уравнения (1), в чем легко убедиться непосредственной проверкой.

Действительно, введя для удобства промежуточные аргументы $y = x - at$ и $z = x + at$, находим, что

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi'(y) + \psi'(z),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varphi''(y) + \psi''(z),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a \varphi'(y) + a \psi'(z),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \varphi''(y) + a^2 \psi''(z)$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Вполне понятно, что интересующее нас решение будет определяться некоторыми дополнительными условиями, вытекающими из существа задачи. Такими являются условия, задающие состояние процесса в начальный момент времени (начальные условия), и условия, определяющие течение процесса на границе области, в которой рассматривается процесс (граничные условия).

Например, для уравнения (7) колебаний струны начальными условиями могут быть

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= f(x), \\ u_t(x, 0) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Первое из условий (12) задает форму струны в начальный момент времени $t = 0$, а второе выражает тот факт, что в начальный момент времени все точки струны находятся в покое.

Условия же

$$u(0, t) = u(l, t) = 0$$

являются граничными условиями. Они показывают, что концы струны $x = 0$ и $x = l$ закреплены на оси x .

Рассмотрим теперь задачу о распространении тепла в стержне. Как было показано в § 2 настоящей главы, этот процесс описывается уравнением (8). Начальное состояние этого процесса может быть описано начальным условием

$$u(x, 0) = f(x), \quad (13)$$

задающим в момент $t = 0$ температуру стержня в любом сечении.

Пусть концы стержня погружены в тающий лед. Тогда тепловой режим на концах стержня можно описать граничными условиями

$$u(0, t) = u(l, t) = 0. \quad (14)$$

Задание условий (13) и (14) определяет единственное решение задачи.

Если же процесс стационарный, т. е. не меняющийся во времени, как, например, в случае потенциального течения

жидкости, которое описывается уравнением (11), то единственное решение определяется заданием граничного условия

$$u = f(x, y) \quad (15)$$

на границе области изменения переменных x и y . Здесь $f(x, y)$ — известная функция.

§ 4. Метод Фурье разделения переменных

Пусть требуется найти решение волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq t < \infty), \quad (16)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= f(x), \\ u_t(x, 0) &= \varphi(x), \end{aligned} \right\} \quad (0 \leq x \leq l) \quad (17)$$

и граничным условиям

$$\left. \begin{aligned} u(0, t) &= 0, \\ u(l, t) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (0 \leq t < \infty). \quad (18)$$

Начальными условиями (17) задаются отклонения и начальные скорости точек струны в момент времени $t = 0$, а граничные условия (18) указывают, что концы струны $x = 0$ и $x = l$ закреплены.

Предположим, что искомая функция $u(x, t)$ может быть представлена в виде произведения

$$u(x, t) = X(x) T(t) \neq 0, \quad (19)$$

где $X(x)$ зависит только от x , а $T(t)$ — только от t .

Будем искать функцию $u(x, t) = X(x) T(t) \neq 0$, удовлетворяющую только граничным условиям (18).

Так как $u(x, t) \neq 0$, то существуют такие значения $x = x_0$ и $t = t_0$, что

$$u(x_0, t_0) = X(x_0) T(t_0) \neq 0,$$

откуда следует, что

$$T(t_0) \neq 0.$$

Но тогда из граничных условий (18) будем иметь

$$X(0) T(t_0) = X(l) T(t_0) = 0. \quad (20)$$

Из (20) следует, что искомая функция $X(x)$ удовлетворяет условиям

$$X(0) = X(l) = 0. \quad (21)$$

Подставляя функцию

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

в уравнение (16), получим

$$XT'' = a^2X''T,$$

откуда

$$\frac{T''}{a^2T} = \frac{X''}{X}. \quad (22)$$

Обратим внимание, что левая часть равенства (22) не зависит от x , а правая часть не зависит от t . Это может быть в случае, если левая и правая части равенства (22) являются постоянными величинами, равными между собой. Обозначая эту постоянную величину через $-\lambda$, будем иметь

$$\frac{T''}{a^2T} = \frac{X''}{X} = -\lambda, \quad (23)$$

откуда получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$T'' + \lambda a^2 T = 0, \quad (24)$$

$$X'' + \lambda X = 0. \quad (25)$$

Покажем, что постоянная величина λ положительна. Пусть, например, $\lambda = 0$. Тогда из (25) следует, что

$$X'' = 0$$

и, следовательно,

$$X(x) = C_1x + C_2.$$

Но функция $X(x)$ должна удовлетворять условиям (21), из которых следует, что

$$\left. \begin{aligned} C_1 \cdot 0 + C_2 &= 0, \\ C_1 \cdot l + C_2 &= 0, \end{aligned} \right\}$$

откуда $C_1 = C_2 = 0$, а значит, $X(x) \equiv 0$. Но тогда и $u(x, t) \equiv 0$, что противоречит условию (19).

Пусть теперь $\lambda < 0$, например $\lambda = -k^2$. Тогда уравнение (25) запишется так:

$$X'' - k^2X = 0.$$

Общее решение этого уравнения будет

$$x = C_1 e^{kx} + C_2 e^{-kx}.$$

Учитывая условие (21), получим систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} C_1 + C_2 &= 0, \\ C_1 e^{kl} + C_2 e^{-kl} &= 0, \end{aligned} \right\}$$

откуда находим, что $C_1 = C_2 = 0$. Но тогда снова $X(x) \equiv 0$ и $u(x, t) \equiv 0$, что противоречит условию (19). Тем самым показано, что величина λ положительна.

Обозначая λ через k^2 , перепишем уравнение (25) в виде

$$X'' + k^2 X = 0. \quad (26)$$

Найдем решение уравнения (26), удовлетворяющее условиям (21). Общее решение уравнения (26) есть

$$X = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx.$$

Постоянные C_1 и C_2 определим из граничных условий (21):

$$\left. \begin{aligned} C_2 &= 0, \\ C_1 \sin kl &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Постоянная C_1 не может быть равна нулю, ибо в этом случае $X \equiv 0$ и $u(x, t) \equiv 0$, что несовместимо с условиями (19). Следовательно, $C_1 \neq 0$, и тогда

$$X = C_1 \sin kx. \quad (28)$$

Из второго равенства (27) следует, что

$$\sin kl = 0,$$

откуда

$$k = \frac{\pi n}{l} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (29)$$

Заметим, что $n = 0$ мы не берем потому, что $\lambda > 0$ и, следовательно, $k = \sqrt{\lambda} \neq 0$. Так как искомое решение (28) содержит произвольный множитель C_1 , то достаточно взять только целые положительные значения n , отбросив значения $n = -1, -2, -3, \dots$. Таким образом,

$$X = C_1 \sin \frac{\pi n}{l} x \quad (n = 1; 2, 3, \dots).$$

Так как при любом n можно выбирать произвольно $C_1 \neq 0$, мы получаем бесконечное множество решений уравнения (25) при граничных условиях (21):

$$X_n = C_n \sin \frac{\pi nx}{l} \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (30)$$

где произвольная постоянная C_n не равна нулю при любом n .

Найдем теперь общее решение уравнения (24)

$$T'' + \lambda a^2 T = 0.$$

Общим решением этого уравнения будет

$$T(t) = M \cos a \sqrt{\lambda} t + N \sin a \sqrt{\lambda} t, \quad (31)$$

где M и N — произвольные постоянные. Так как $\lambda = k^2$, а $k = \frac{\pi n}{l}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), то при любом из возможных значений λ

$$T_n(t) = M_n \cos \frac{\pi na}{l} t + N_n \sin \frac{\pi na}{l} t \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (32)$$

и, следовательно,

$$u_n(x, t) = X_n(x) T_n(t) = C_n \sin \frac{\pi nx}{l} \left[M_n \cos \frac{\pi na}{l} t + N_n \sin \frac{\pi na}{l} t \right]. \quad (33)$$

Обозначая $C_n M_n = A_n$ и $C_n N_n = B_n$, получим:

$$u_n(x, t) = \left(A_n \cos \frac{\pi na}{l} t + B_n \sin \frac{\pi na}{l} t \right) \sin \frac{\pi nx}{l}. \quad (34)$$

При любом n функция (34) удовлетворяет уравнению (16) и граничным условиям (18).

Рассмотрим функцию

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos \frac{\pi na}{l} t + B_n \sin \frac{\pi na}{l} t \right] \sin \frac{\pi nx}{l}, \quad (35)$$

определенную рядом (35). Если коэффициенты A_n и B_n таковы, что ряд (35) сходится и допускает двукратное дифференцирование по x и по t , то функция (35) является решением линейного однородного уравнения (16), удовлетворяющим граничным условиям (18).

Попытаемся подобрать коэффициенты A_n и B_n так, чтобы удовлетворялись и начальные условия.

На основании первого из начальных условий (17) имеем:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{\pi nx}{l}. \quad (36)$$

Если функция $f(x)$ допускает разложение в ряд Фурье на интервале $(0, l)$, то коэффициенты A_n будут коэффициентами Фурье функции $f(x)$ и, следовательно,

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} x dx. \quad (37)$$

Дифференцируя равенство (35) по t и пользуясь вторым из начальных условий (17), получим:

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{\pi na}{l} \sin \frac{\pi n x}{l}. \quad (38)$$

Если и функция $f(x)$ тоже допускает разложение в ряд Фурье в интервале $(0, l)$, то

$$B_n \frac{\pi na}{l} = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx, \quad (39)$$

откуда

$$B_n = \frac{2}{\pi na} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx. \quad (40)$$

Таким образом, если коэффициенты A_n и B_n ряда (35) определяются по формулам (37) и (40), причем ряд (35) сходится и допускает двукратное интегрирование по x и по t , то функция (35) является решением уравнения (16), удовлетворяющим начальным условиям (17) и граничным условиям (18).

§ 5. Физическое истолкование решения уравнения колебаний струны

Дадим физическое истолкование полученному решению

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{\pi na}{l} t + B_n \sin \frac{\pi na}{l} t \right) \sin \frac{\pi n}{l} x. \quad (35)$$

Функции

$$u_n(x, t) = \left(A_n \cos \frac{\pi na}{l} t + B_n \sin \frac{\pi na}{l} t \right) \sin \frac{\pi n}{l} x \quad (34)$$

являются при любом n ($n = 1, 2, 3, \dots$) решениями уравнения (16) при граничных условиях (18).

Каждая функция (34) представляет собой так называемую стоячую волну, при которой все точки струны совершают гармонические колебания с одинаковой фазой и частотой. Это легко видеть, преобразовав решение (34) к виду

$$u_n(x, t) = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \left(\frac{A_n}{\sqrt{A_n^2 + B_n^2}} \cos \frac{\pi na}{l} t + \frac{B_n}{\sqrt{A_n^2 + B_n^2}} \sin \frac{\pi na}{l} t \right) \sin \frac{\pi n}{l} x$$

или

$$u_n(x, t) = a_n \sin \frac{\pi n}{l} x \cdot \sin \left(\frac{\pi na}{l} t + \alpha_n \right), \quad (41)$$

где

$$a_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}, \quad \sin \alpha_n = \frac{A_n}{\sqrt{A_n^2 + B_n^2}}, \quad \cos \alpha_n = \frac{B_n}{\sqrt{A_n^2 + B_n^2}}.$$

Из (41) следует, что все точки струны совершают гармонические колебания с одинаковой фазой α_n , одинаковой частотой $\omega_n = \frac{\pi na}{l}$ и амплитудой колебания, равной $a_n \sin \frac{\pi n}{l} x$. При таком колебании точки струны

$$x = 0, x = \frac{l}{n}, x = \frac{2l}{n}, \dots, x = \frac{n-1}{n} l, l$$

будут оставаться в покое, а струна будет издавать звук, высота которого зависит от частоты колебаний ω_n . Самый низкий тон называют *основным*. Его частота

$$\omega_1 = \frac{\pi a}{l} = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho}}, \quad (42)$$

где T — натяжение струны, ρ — линейная плотность, а l — длина струны. Из формулы (42) видно, что частоты основного тона тем выше, чем короче струна, чем больше натяжение струны и чем легче струна.

Тона с частотой ω_n для $n \geq 2$ называются *обертонами*. Обертоны, частоты которых кратны частоте основного тона, называются *гармониками*.

Решение (35) складывается из отдельных гармоник, действие которых сводится к созданию тембра звука.

Таким образом, задание начальных условий (17) будет определять тембр звука, издаваемого колеблющейся струной.

Метод Фурье решения волнового уравнения (1) при граничных условиях (18) и начальных условиях (17) дает возможность определить коэффициенты функции (35) так, чтобы удовлетворялись начальные условия, т. е. чтобы был обеспечен заданный тембр звучания струны. Заметим, что начальными условиями определяется и громкость звучания струны, так как амплитуда колебания

$$\sqrt{A_n^2 + B_n^2} \sin \frac{\pi n}{l} x$$

точек струны определяется начальными условиями (17), что легко видно из формул (37) и (40) для определения коэффициентов A_n и B_n .

§ 6. Примеры решения уравнений колебаний струны методом Фурье

Пример 1. Однородная струна длиной l натянута между точками $x = 0$ и $x = l$. В точке $x = c$ струна оттягивается на небольшое расстояние h от положения равновесия и в момент $t = 0$ отпускается без начальной скорости. Определить отклонение $u(x, t)$ струны для любого момента времени.

Решение. Задача сводится к решению волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

при граничных условиях

$$u(0, t) = u(l, t) = 0$$

и начальных условиях

$$u(x, 0) = \begin{cases} \frac{n}{c}x & \text{при } 0 \leq x \leq c, \\ \frac{h(x-l)}{c-l} & \text{при } c < x \leq l, \end{cases}$$

$$u_t'(x, 0) = 0.$$

Ищем решение в виде

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{\pi na}{l} t + B_n \sin \frac{\pi na}{l} t \right) \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad (35)$$

где коэффициенты A_n и B_n определяются по формулам (37) и (40).

По формуле (37) находим

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx = \frac{2}{l} \int_0^c \frac{h}{c} x \sin \frac{\pi n}{l} x dx +$$

$$+ \frac{2}{l} \int_c^l \frac{h(x-l)}{c-l} \sin \frac{\pi n}{l} x dx = \frac{2h}{lc} \int_0^c x \sin \frac{\pi n}{l} x dx +$$

$$+ \frac{2h}{l(c-l)} \int_c^l (x-l) \sin \frac{\pi n}{l} x dx.$$

Интегрируя по частям, находим

$$\int_0^c x \sin \frac{\pi n}{l} x dx = -\frac{l}{\pi n} x \cos \frac{\pi n}{l} x \Big|_0^c + \frac{l}{\pi n} \int_0^c \cos \frac{\pi n}{l} x dx =$$

$$= -\frac{cl}{\pi n} \cos \frac{\pi nc}{l} + \frac{l^2}{\pi^2 n^2} \sin \frac{\pi n}{l} x \Big|_0^c = -\frac{cl}{\pi n} \cos \frac{\pi nc}{l} + \frac{l^2}{\pi^2 n^2} \sin \frac{\pi nc}{l}.$$

Аналогично найдем

$$\int_c^l (x-l) \sin \frac{\pi n}{l} x dx = \frac{-l}{\pi n} (x-l) \cos \frac{\pi nx}{l} \Big|_c^l + \frac{l}{\pi n} \int_c^l \cos \frac{\pi n}{l} x dx =$$

$$= \frac{l}{\pi n} (c-l) \cos \frac{\pi nc}{l} + \frac{l^2}{\pi^2 n^2} \sin \frac{\pi n}{l} x \Big|_c = \frac{l(c-l)}{\pi n} \cos \frac{\pi nc}{l} - \frac{l^2}{\pi^2 n^2} \sin \frac{\pi nc}{l}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2h}{cl} \left[-\frac{cl}{\pi n} \cos \frac{\pi nc}{l} + \frac{l^2}{\pi^2 n^2} \sin \frac{\pi nc}{l} \right] + \\ &+ \frac{2h}{l(c-l)} \left[\frac{l(c-l)}{\pi n} \cos \frac{\pi nc}{l} - \frac{l^2}{\pi^2 n^2} \sin \frac{\pi nc}{l} \right] = \\ &= \frac{2hl}{\pi^2 n^2 c} \sin \frac{\pi nc}{l} - \frac{2hl}{(c-l)\pi^2 n^2} \sin \frac{\pi nc}{l} = \\ &= \left(\frac{2hl}{\pi^2 n^2 c} - \frac{2hl}{(c-l)\pi^2 n^2} \right) \sin \frac{\pi nc}{l} = -\frac{2hl^2}{\pi^2 c(c-l)} \cdot \frac{1}{n^2} \sin \frac{\pi nc}{l} = \\ &= \frac{2hl^2}{\pi^2 c(l-c)} \cdot \frac{1}{n^2} \sin \frac{\pi nc}{l}. \end{aligned}$$

По формуле (40) находим, что $B_n=0$, так как $\varphi(x) \equiv 0$. Подставляя в (35) вместо A_n и B_n их значения, получим искомое решение

$$u(x, t) = \frac{2hl^2}{\pi^2 c(l-c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{\pi nc}{l} \cos \frac{\pi nat}{l} \sin \frac{\pi nx}{l}.$$

Пример 2. Однородная струна, закрепленная на концах $x=0$ и $x=l$, имеет в начальный момент времени формулу параболы

$$f(x) = \frac{x(l-x)}{M},$$

где M — постоянная. Определить смещение точек струны от прямолинейного положения равновесия, предполагая, что начальные скорости отсутствуют.

Решение. Нужно найти решение уравнения колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

если граничные условия

$$u(0, t) = u(l, t) = 0$$

и начальные условия

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= \frac{x(l-x)}{M}, \\ \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Решение ищем в виде ряда (35). Коэффициенты A_n находим по формуле (37):

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{lM} \int_0^l x(l-x) \sin \frac{\pi nx}{l} dx = \frac{2}{lM} \left[-\frac{l}{\pi n} x(l-x) \cos \frac{\pi nx}{l} \Big|_0^l + \right. \\ &\quad \left. + \frac{l}{\pi n} \int_0^l (l-2x) \cos \frac{\pi nx}{l} dx \right] = \frac{2}{\pi nM} \left[\frac{l}{\pi n} (l-2x) \sin \frac{\pi nx}{l} \Big|_0^l + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2l}{\pi n} \int_0^l \sin \frac{\pi nx}{l} dx \right] = \frac{4l^2}{\pi^3 n^3 M} (1 - \cos \pi n) = \frac{4l^2}{\pi^3 n^3 M} [1 - (-1)^n]. \end{aligned}$$

По формуле (40) находим, что $B_n = 0$, так как $\varphi(x) \equiv 0$. Следовательно, поставленная задача имеет решение

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{4l^2}{\pi^3 M} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n^3} \cos \frac{\pi nat}{l} \sin \frac{\pi nx}{l} = \\ &= \frac{8l^2}{\pi^3 M} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^3} \cos \frac{(2k+1)\pi at}{l} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{l} \end{aligned}$$

(так как при четном $n = 2k + 2$ имеем $1 - (-1)^n = 0$).

Пример 3. Найти уравнение $u = u(x, t)$ формы однородной струны, закрепленной в точках $x = 0$ и $x = l$, в произвольный момент времени t , если

$$u(x, 0) = 0 \text{ и } \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \begin{cases} v_0 & \text{при } |x - c| < \frac{\pi}{2h}, \\ 0 & \text{при } |x - c| > \frac{\pi}{2h}. \end{cases}$$

Решение. Решение ищем в виде ряда (35). По формуле (37) находим, что $A_n = 0$. Коэффициенты B_n находим по формуле (40):

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{\pi na} \int_{c-\frac{\pi}{2h}}^{c+\frac{\pi}{2h}} v_0 \sin \frac{\pi nx}{l} dx = \frac{2v_0}{\pi na} \left(-\frac{l}{\pi n} \cos \frac{\pi nx}{l} \right) \Big|_{c-\frac{\pi}{2h}}^{c+\frac{\pi}{2h}} = \\ &= \frac{2v_0 l}{\pi^2 n^2 a} \left[\cos \frac{\pi n(c - \frac{\pi}{2h})}{l} - \cos \frac{\pi n(c + \frac{\pi}{2h})}{l} \right] = \end{aligned}$$

$$= \frac{4v_0 l}{\pi^2 n^2 a} \sin \frac{\pi n c}{l} \sin \frac{\pi^2 n}{2 h l}.$$

Подставляя A_n и B_n в (35), получим искомое решение

$$u(x, t) = \frac{4v_0 l}{\pi^2 a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{\pi n c}{l} \sin \frac{\pi^2 n}{2 h l} \sin \frac{\pi n a t}{l} \sin \frac{\pi n x}{l}.$$

Мы рассмотрели метод разделения переменных (метод Фурье) для уравнения малых колебаний струны. Этим же методом может быть решено и уравнение теплопроводности при определенных начальных и граничных условиях.

Заметим, что метод Фурье не является общим для всех уравнений математической физики, так как он применим только тогда, когда искомое решение $u(x, t)$ представимо в виде

$$u(x, t) = X(x) T(t).$$

Кроме метода Фурье, существует целый ряд других методов решения уравнений математической физики. Но эти методы уже выходят за рамки программы общего курса высшей математики для высших технических учебных заведений.

ОГЛАВЛЕНИЕ

д и с л о в и е

3

I. Линейные преобразования и матрицы

1. Линейные преобразования на плоскости	5
2. Линейные преобразования в пространстве	7
3. Квадратные матрицы второго порядка	9
4. Квадратные матрицы третьего порядка	11
5. Основные действия над матрицами	14
6. Теорема об умножении определителей	16
7. Обратная матрица	16
8. Применение матриц к решению систем линейных уравнений	20
9. Ортогональные преобразования	23
10. Собственные векторы и собственные значения	26
11. Линейные преобразования с симметрическими матрицами	29
12. Приведение к диагональному виду матрицы симметриче- ского линейного преобразования в пространстве	31
13. Приведение квадратичной формы к каноническому виду	33
14. Приведение к каноническому виду уравнений линий второ- го порядка	36
15. Приведение к каноническому виду уравнений поверхностей второго порядка	39

II. Теория поля

1. Скалярное поле	41
2. Производная по направлению	43
3. Градиент	46
4. Векторное поле	51
5. Поток вектора через поверхность	54
6. Дивергенция	61
7. Линейный интеграл и циркуляция	67
8. Вихрь векторного поля	71
9. Оператор Гамильтона	78

III. Ряды Фурье. Интеграл Фурье

1. Периодические функции	80
2. Гармоники	81
3. Тригонометрические ряды	84
4. Ряды Фурье. Коэффициенты Фурье	86
5. Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций	89
6. Примеры на разложение функций в ряд Фурье	91
7. Ряд Фурье на произвольном интервале	101
8. О разложении в ряд Фурье непериодических функций	105
9. Комплексная форма ряда Фурье	111
10. Приближение функции с помощью тригонометрического многочлена. Неравенство Бесселя	113
11. Интеграл Фурье	118
12. Интеграл Фурье для четных и нечетных функций	121
13. Интеграл Фурье в комплексной форме	127

149

Глава IV. Понятие об уравнениях математической физики

§ 1. Основные уравнения математической физики	132
§ 2. Вывод основных уравнений математической физики	133
§ 3. Начальные и граничные условия	137
§ 4. Метод Фурье разделения переменных	139
§ 5. Физическое истолкование решения уравнения колебаний струны	143
§ 6. Примеры решения уравнений колебаний струны методом Фурье	144

*Адзерихо Серафим Яковлевич,
Полонский Иван Мартынович,
Стодольник Нина Александровна.*

ВВЕДЕНИЕ В ЛИНЕЙНУЮ АЛГЕБРУ, ТЕОРИЮ ПОЛЯ И РЯДЫ ФУРЬЕ. Под. общ. ред. С. Я. Адзерихо. Минск, «Высшая школа», 1968. 152 стр. с илл. 517

Редактор *Т. К. Майборода*
Обложка *Г. И. Важнова*
Худож. редактор *В. Н. Валентович*
Техн. редактор *М. Н. Кислякова*
Корректор *Е. Г. Гресик*

АТ 04275. Сдано в набор 24/V 1967 г. Подписано к печати 10/V 1968 г. Бумага 60×90¹/₁₆ типогр. № 3. Печ. л. 9,5. Уч.-изд. л. 8,2. Изд. № 66—07. Тип. зак. 539. Тираж 12 000 экз. Цена 23 коп.

Издательство «Высшая школа» Государственного комитета Совета Министров БССР по печати
Редакция физико-математической литературы.
Тем. план 1968 г. № 23. Минск, ул. Кирова, 24.
Полиграфический комбинат им. Я. Коласа Государственного комитета Совета Министров БССР по печати, Минск, ул. Красная, 23.

А 29 **Адзерихо С. Я., Полонский И. М., Стодольник Н. А.**
Введение в линейную алгебру, теорию поля и ряды
Фурье. Под общ. ред. С. Я. Адзерихо. Минск, «Вы-
шэйш. школа», 1968.
152 стр. с илл.

Учебное пособие для технологических специальностей вузов.
Книга состоит из теоретических положений, которые подкрепля-
ются большим количеством разнообразных примеров и задач, что
делает ее весьма удобной для студентов-заочников и студентов, зани-
мающихся на вечерних отделениях вузов.

2-2-3

23—68

517

